



ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้

ความรู้



เจษฎา สุจริตธุระการ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

2566

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยบูรพา

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการณรงค์ให้  
ความรู้



เจษฎา สุจริตธุระการ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

2566

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยบูรพา

Mathematical Model for Controlling the Spread of Hepatitis B Virus Disease on Education  
Campaign



JEDSADA SUTJARITTURAKAN

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF  
THE REQUIREMENTS FOR MASTER DEGREE OF SCIENCE

IN MATHEMATICS EDUCATION

FACULTY OF SCIENCE

BURAPHA UNIVERSITY

2023

COPYRIGHT OF BURAPHA UNIVERSITY

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ได้พิจารณา  
วิทยานิพนธ์ของ เจษฎา สุจริตธุระการ ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม  
หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

.....  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนากู ศรีมงคล)

..... ประธาน  
(รองศาสตราจารย์ ดร.วรรณนิภา แสงทอง)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ดวงกมล ผลเต็ม)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนากู ศรีมงคล)

..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์  
(รองศาสตราจารย์ ดร. อุษาวดี ตันดีวารานุกษ์)

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยบูรพา อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของ  
การศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยบูรพา

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย  
(รองศาสตราจารย์ ดร.วิทวัส แจ่มเยี่ยม)

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

61920207: สาขาวิชา: คณิตศาสตร์ศึกษา; วท.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา)

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, โรคไวรัสตับอักเสบบี, การรณรงค์ให้ความรู้

เจษฎา สุจริตธุระการ : ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้. ( Mathematical Model for Controlling the Spread of Hepatitis B Virus Disease on Education Campaign) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: สินีนาฏ ศรีมงคล ปี พ.ศ. 2566.

โรคไวรัสตับอักเสบบีสามารถแพร่ระบาดไปยังบุคคลอื่นๆ รอบข้างได้โดยสารคัดหลั่งต่างๆ อาทิ เช่น เลือด น้ำอสุจิ หรือของเหลวต่างๆ ในร่างกายของผู้ติดเชื้อ โดยในจังหวัดภูเก็ตมีการรณรงค์ให้ความรู้เกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีและได้รับการสนับสนุนจากองค์การบริหารส่วนท้องถิ่นจังหวัดภูเก็ต ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ทำการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไวรัสตับอักเสบบีโดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์การรณรงค์ให้ความรู้ ผลการวิจัยพบว่าจากการรณรงค์ให้ความรู้เกี่ยวกับโรคไวรัสตับอักเสบบี นั้นมีความสำคัญและมีบทบาทเป็นอย่างมากให้ค่าระดับการติดเชื้อที่ลดลง โดยจะเห็นได้ว่าอัตราการรณรงค์ให้ความรู้ความเข้าใจมีค่าที่สูงขึ้นจะส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อมีค่าลดลง จึงสามารถทราบได้ว่าผู้ติดเชื้อที่มีการรณรงค์ให้ความรู้สามารถช่วยลดอัตราการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีได้

61920207: MAJOR: MATHEMATICS EDUCATION; M.Sc. (MATHEMATICS EDUCATION)

KEYWORDS: mathematical model, hepatitis B, educational campaign

JEDSADA SUTJARITTURAKAN : MATHEMATICAL MODEL FOR CONTROLLING THE SPREAD OF HEPATITIS B VIRUS DISEASE ON EDUCATION CAMPAIGN. ADVISORY COMMITTEE: SINEENART SRIMONGKOL, 2023.

Hepatitis B Virus spreads to other carriers by blood, semen, or body fluid of infected person. In Phuket province, the education campaign of the spread of Hepatitis B virus disease is supported by Phuket provincial office of the local administration. In this research, a mathematical model of infectious diseases on education campaign is analyzed. The qualitative behaviors and quantitative solutions are carried out. The results show that the spread of Hepatitis B virus disease education campaign play an important role in the basic reproduction number, the rate of education campaign with higher values resulting in lower basic reproduction number. It is indicated that the infected population who has an education campaign, reduces the spread of Hepatitis B virus.

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สินีนานู ศรีมงคล อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ที่กรุณาให้คำแนะนำและชี้แนะแนวทางที่ถูกต้องให้กับผู้วิจัยตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ด้วยความละเอียดถี่ถ้วนและเอาใจใส่ด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งกับความกรุณาและความทุ่มเทของท่านอาจารย์เป็นอย่างยิ่ง จึงกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร.วรรณนิภา แสงทอง และกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ดวงกมล ผลเต็ม ที่ได้ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ ทำให้วิทยานิพนธ์มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น และขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่าน ที่ได้ความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบ รวมทั้งให้คำแนะนำ แก้ไข ในการทำวิจัยให้มีคุณภาพ

ขอขอบพระคุณ คุณแม่วิสัย คำยัง ครอบครัว และเพื่อนๆ ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนผู้วิจัยเสมอมา คุณค่าและประโยชน์ของวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตเวทิตาแด่บุพการี บุรพจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้ที่มีการศึกษาและประสบความสำเร็จมาจนตราบเท่าทุกวันนี้

เจษฎา สุจริตธรรการ

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญภาพ.....	ฎ
บทที่ 1.....	1
บทนำ.....	1
ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	3
ขอบเขตการศึกษา.....	3
กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	5
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	5
บทที่ 2.....	7
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และความรู้พื้นฐานในงานวิจัย.....	7
โรคไวรัสตับอักเสบบี.....	7
ลักษณะของโรค.....	7
ชนิดและอาการของโรค.....	8
การติดต่อและการป้องกันโรค.....	8
ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.....	9
ความหมายของการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.....	9



ขั้นตอนการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์.....	10
ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการระบาดของโรค .....	11
การวิเคราะห์แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ .....	12
เมทริกซ์และการดำเนินการทางเมทริกซ์ .....	12
ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงที่.....	14
วิธี Next Generation Matrix.....	16
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	18
บทที่ 3 .....	22
ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.....	22
แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์.....	23
บทที่ 4 .....	25
การวิเคราะห์เชิงคุณภาพ .....	25
พัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์.....	26
การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ .....	28
การหาขอบเขตของค่าคงที่ (Invariant Region).....	28
การหาจุดสมดุล .....	31
การหาค่าระดับการติดเชื้อ .....	36
การวิเคราะห์เสถียรภาพ .....	42
บทที่ 5 .....	46
ตัวอย่างเชิงตัวเลข .....	46
ค่าพารามิเตอร์.....	47
ผลเชิงตัวเลข .....	48
การวิเคราะห์อัตราการบรรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี .....	52

บทที่ 6 .....	56
สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ .....	56
สรุป อภิปรายผลการวิจัย .....	56
ข้อเสนอแนะ .....	58
บรรณานุกรม.....	60
ภาคผนวก ก.....	63
โค้ดตั้ง โปรแกรมเมทแลบ .....	63
ประวัติย่อของผู้วิจัย.....	67



## สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี	47
---------------------------------------------------------------------------------------------	----



## สารบัญภาพ

	หน้า
ภาพที่ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาด .....	5
ภาพที่ 2 กระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.....	10
ภาพที่ 3 ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาด.....	24
ภาพที่ 4 ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีโดยการรณรงค์ให้ความรู้ .....	25
ภาพที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ.....	48
ภาพที่ 6 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) .....	49
ภาพที่ 7 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ.....	50
ภาพที่ 8 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) ณ เวลา t ใด ๆ	51
ภาพที่ 9 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ .....	52
ภาพที่ 10 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t	53
ภาพที่ 11 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ.....	54
ภาพที่ 12 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) ณ เวลา t ใด ๆ	55

# บทที่ 1

## บทนำ

### ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัจจุบันคณิตศาสตร์มีความจำเป็นเป็นอย่างมากในชีวิตประจำวัน และการพัฒนาประเทศ คณิตศาสตร์เข้ามามีบทบาทในหลายด้าน หลายแขนง และสามารถนำไปประยุกต์ได้หลายสาขา เช่น ทางด้านการศึกษา ด้านกีฬา โดยเฉพาะทางด้านการแพทย์สามารถนำคณิตศาสตร์เพื่อจำลองการ เกิดโรคและการรักษาโรคต่าง ๆ ได้ รวมทั้งเป็นเครื่องมือที่ช่วยทำความเข้าใจในการอธิบายสิ่งต่าง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการหนึ่งของการอธิบายสถานการณ์ในชีวิตจริงในแบบภาษา คณิตศาสตร์ โดยการเปลี่ยนสถานการณ์ให้อยู่ในรูปของตัวแปรและสมการ ด้วยการสร้างสมมุติฐานว่าสิ่งใดมีความสำคัญและไม่สนใจรายละเอียดปลีกย่อยบางอย่างที่อาจจะมองข้ามไปได้ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีจุดมุ่งหมายเพื่อจะจับองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดของเหตุการณ์หนึ่งๆ เราสามารถจะตรวจสอบความถูกต้องของกลไกคณิตศาสตร์หนึ่งที่ถูกสร้างขึ้นมาได้เพื่อจะตรวจสอบ ว่าแบบจำลองนั้นสะท้อนสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือไม่ (แกทเลีย ดวงเกตุ, 2556) (test)

บทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่ กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่าง ๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำ โรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการ ระบาดและการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิด อันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีกทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับการเสริมมาตรการการ รักษาและการป้องกันโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมมากที่สุดด้วย (ธีรวัฒน์ นาคะบุตร, 2546)

เชื้อไวรัสตับอักเสบบีอยู่ด้วยกันหลายชนิด ชนิดเอ บี ซี ดี อี แต่เหตุผลที่ต้องให้ความสำคัญ กับไวรัสตับอักเสบบี (Hepatitis B virus, HBV) เป็นพิเศษนั้นเนื่องจากไวรัสตับอักเสบบี ทำให้ผู้ได้รับเชื้อ มีแนวโน้มที่จะเกิดภาวะตับอักเสบริ้รังตับแข็ง และร้ายแรงจนอาจ กลายเป็น มะเร็งตับในที่สุด ไวรัสตับอักเสบบี เป็นหนึ่งในสาเหตุหลักที่ทำให้เกิดตับอักเสบบีที่เรียกว่าตับ อักเสบบี (Hepatitis B) ซึ่งทำให้มีความเสี่ยงในการพัฒนาเป็นโรคตับแข็งและมะเร็งตับ โดยข้อมูล จากองค์การอนามัยโลกปี 2560 พบว่าทั่วโลกมีผู้ป่วยที่มีภาวะตับอักเสบบีเรื้อรังมากกว่า 240 ล้าน คน และในทุก ๆ ปีจะมีผู้ติดเชื้อ HBV มากกว่า 6 แสนรายเสียชีวิตเนื่องจากโรคแทรกซ้อนที่เกิดจาก ภาวะตับอักเสบบีเรื้อรังรวมทั้งโรคตับแข็งและมะเร็งตับ ประเทศไทยเป็นประเทศที่มีโรคไวรัส ตับ

อีกเสบนชนิดที่ชุกชุมมากที่สุดแห่งหนึ่งของโลก โดยมีผู้ที่เป็พพาหะหรือผู้ที่มีเชื้อไวรัสบ็อยู่ใน กระแสเลือดถึงร้อยละ 7 ของประชากรทั้งหมดหรือประมาณ 9 ล้านคน (ศูนย์ข้อมูลโรคติดเชื้อและ พาหะนำโรค, 2562)

ในจังหวัดภูเก็ตมีผู้ป่วยโรคมะเร็งระดับส่วนใหญ่ ประมาณร้อยละ 90 มีประวัติเป็นโรคไวรัส ตับอักเสบบีมาก่อน โดยเมื่อมีการรับเชื้อเข้าสู่ร่างกาย ส่วนมากผู้ที่ได้รับเชื้อจะไม่รู้ตัว เนื่องจากไม่มี อาการป่วยใด ๆ ปรากฏ การดำเนินของโรคจึงเป็นไปอย่างเงียบ ๆ บางราย อาจมีไข้ หรือปวดเมื่อย เนื้อตัวซึ่งทำให้เข้าใจผิด ไปได้ว่าเป็นเพียงไข้หวัด โรคไวรัสตับอักเสบบีนั้นแบ่งได้เป็น 2 ชนิด คือ แบบเฉียบพลัน และแบบเรื้อรัง สำหรับแบบเฉียบพลัน เมื่อมีการรับเชื้อไปแล้วราว 2 - 3 เดือน จะมีอาการเป็นไข้ เป็นหวัด ปวดเมื่อยตามตัว หลังจากนั้นประมาณ 1 สัปดาห์จะมีอาการตับอักเส บตัวเหลือง ตาเหลือง ถ้าตรวจดูจะมีค่า การทำงานของตับสูงกว่าปกติ อาการพวกนี้จะดีขึ้นภายใน 2 - 3 สัปดาห์ หลังจากนั้นร่างกายจะสร้างภูมิคุ้มกันขึ้นมา และผู้ป่วยส่วนมากจะไม่กลับมาเป็นโรค ไวรัสตับอักเสบบีอีก แต่ถ้าภูมิคุ้มกันไม่สามารถ จัดการกับเชื้อไวรัสได้ ก็จะกลายเป็นโรคไวรัสตับ อักเสบบีเรื้อรังซึ่งอาจส่งผลให้ผู้ป่วยเป็น โรคตับแข็งและมะเร็งตับต่อไป (Bureau of Epidemiology, 2019)

การป้องกันโรคโดยระวังตัวเองไว้ เวลาทานข้าวร่วมกับคนอื่นต้องใช้ช้อนกลางและไม่ใช้ ของมีคมหรือแปรงสีฟันร่วมกับใคร ที่สำคัญควรมีการตรวจเลือดด้วย วิธีนี้เป็นวิธีการเดียวที่จะ ทราบได้ว่าผู้ป่วยมีเชื้อไวรัสอยู่หรือไม่ซึ่งส่วนมากผู้ป่วย จะทราบว่าตัวเองมีเชื้อตอนที่มาตรวจ สุขภาพประจำปีหรือตอนที่ม่ อาการดีขึ้น ตัวเหลือง ตาเหลือง มีไข้ อ่อนเพลีย เบื่ออาหาร ดังนั้น การป้องกันจึงเป็นวิธีที่ดีที่สุดจึงควรหลีกเลี่ยงการรับประทานอาหารโดยใช้ช้อนร่วมกัน มีเพศสัมพันธ์อย่างปลอดภัย งดดื่มเหล้า ตรวจสุขภาพร่างกายเป็นประจำทุกปี โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ตรวจเช็กตับให้ได้ปีละครั้ง เลือกรับประทานอาหารที่มีประโยชน์ พักผ่อนให้เพียงพอ ออกกำลัง กายอย่างสม่ำเสมอเพื่อสร้างเสริมภูมิคุ้มกันโรค (สำนักกระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวง สาธารณสุข, 2562)

การรณรงค์มีบทบาทที่สำคัญในการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมต่าง ๆ ของประชาชน เพราะ การรณรงค์ส่งผลให้ประชาชน มีการเปลี่ยนแปลงทัศนคติ และการตัดสินใจที่จะรับเอาความคิดเห็น ใหม่ ๆ เกี่ยวกับสุขภาพ การเกษตร และการวางแผนครอบครัว โดยการรณรงค์ในแต่ละครั้งนั้น จะมี วัตถุประสงค์ในการรณรงค์ที่มีความแตกต่างกันออกไป ไม่ว่าจะเป็นการรณรงค์ เพื่อให้ข้อมูล ข่าวสาร (inform) หรือการรณรงค์เพื่อโน้มน้าวใจให้คล้อยตาม (persuade) อันจะนำไปสู่การเข้ามามี ส่วนร่วมในกิจกรรม (mobilize) และเกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมในที่สุด (กิตติ กันภัย, 2543) ดังนั้นการรณรงค์ให้ความรู้จึงเป็นปัจจัยหนึ่งที่จะช่วยป้องกันโรคติดต่อต่าง ๆ

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคร้ายต่าง ๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการระบาดและการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีกทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับการเสริมมาตรการการรักษาและการป้องกันโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมมากที่สุดด้วย (Bureau of Epidemiology, 2019)

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงทำการวิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการณรงค์ให้ความรู้ (Mathematical Model for Controlling the Spread of Hepatitis B Virus Disease on Education Campaign) ซึ่งผู้วิจัยได้ศึกษาเกี่ยวกับการรณรงค์ให้ความรู้เพื่อควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ในจังหวัดภูเก็ต ในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตจะเริ่มมีการให้วัคซีนป้องกันตั้งแต่เด็ก แต่ก็ยังคงมีประชากรในจังหวัดส่วนหนึ่งที่เป็นพาหะของโรคและสามารถแพร่เชื้อได้ ซึ่งผู้ติดเชื้อจะไม่มีอาการแต่จะมีการดำเนินของโรคไปอย่างต่อเนื่อง ทำให้ผู้ป่วยไม่ได้ดูแลตนเอง หรือไม่ได้รับการรักษาจากแพทย์อย่างถูกต้องตั้งแต่ต้นและมีความรู้เกี่ยวกับโรคค่อนข้างน้อย จึงทำให้เกิดโรคการแพร่เชื้อไปเรื่อยๆ ให้เป็นปัจจัยสำคัญสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคไวรัสตับอักเสบบี ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

### วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1) เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้ในจังหวัดภูเก็ต
- 2) เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้ในจังหวัดภูเก็ต

### ขอบเขตการศึกษา

- 1) ศึกษาเกี่ยวกับโรคไวรัสตับอักเสบบี (Hepatitis B Virus: HBV) ในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ต โดยศึกษาไวรัสตับอักเสบบี ชนิด บี ที่ทำให้ผู้ได้รับเชื้อ มีแนวโน้มที่จะเกิดภาวะตับอักเสบริ่ง ตับแข็ง และร้ายแรงจนอาจกลายเป็นมะเร็งตับ ซึ่งไวรัสตับอักเสบบี เป็นสาเหตุหลักที่ทำให้เกิดตับอักเสบบีที่เรียกว่าตับอักเสบบี (Hepatitis B) ซึ่งทำให้มีความเสี่ยงในการพัฒนาเป็นโรคตับแข็งและมะเร็งตับ

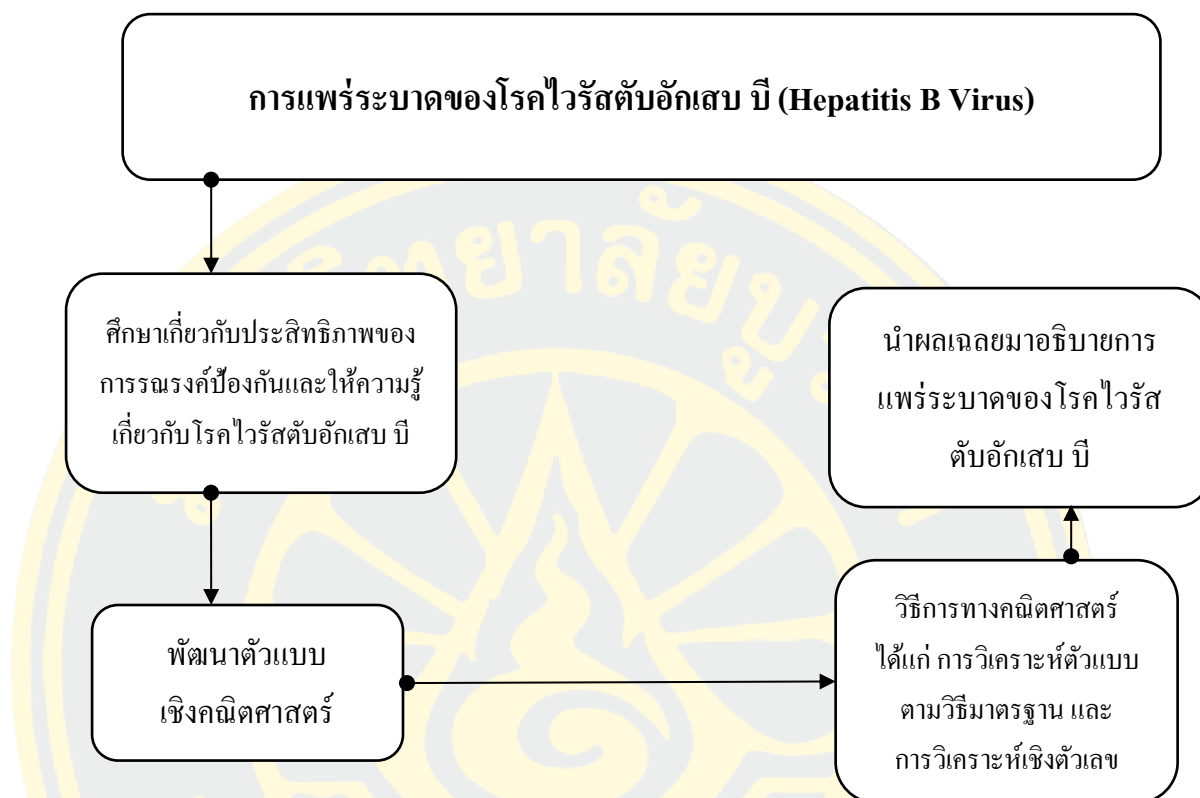
2) การรณรงค์ให้ความรู้และศึกษาเกี่ยวกับประสิทธิภาพของการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้ในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ต

3) วิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ตามวิธีมาตรฐาน โดยพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ 1) กลุ่มคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible : S) หมายถึง กลุ่มคนที่ยังไม่ได้รับเชื้อแต่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ 2) กลุ่มคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (Expose : E) หมายถึง กลุ่มคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ และไม่สามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้ 3) กลุ่มคนที่ติดเชื้อแสดงอาการ (Infectious : I) หมายถึง กลุ่มคนที่ติดเชื้อแสดงอาการ และสามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้ และ 4) กลุ่มคนที่หายจากโรค (Recovered: R) หมายถึง บุคคลที่ติดเชื้อและมีภูมิคุ้มกันชนิดถาวร หรือเป็นบุคคลที่ถูกแยกตัวออกไปจนมีภูมิคุ้มกัน หรือหายจากโรค โดยดำเนินการหาขอบเขตของค่าคงที่ (Invariant Region) หาจุดสมดุล (Equilibrium Point) หาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number) และวิเคราะห์เสถียรภาพ (Stability Analysis)

4) วิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยเก็บข้อมูลหาค่าพารามิเตอร์ของอัตราการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี หาค่าอัตราการสัมผัสเชื้อ อัตราการมีภูมิคุ้มกัน อัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์ อัตราการตายโดยธรรมชาติ และจำนวนประชากร เพื่อพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point) และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค (Endemic Equilibrium Point) ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นเป็น Local Asymptotically Stable ซึ่งได้จากการนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาค่าตอบเชิงตัวเลขโดยจำลองแบบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



## กรอบแนวคิดในการวิจัย



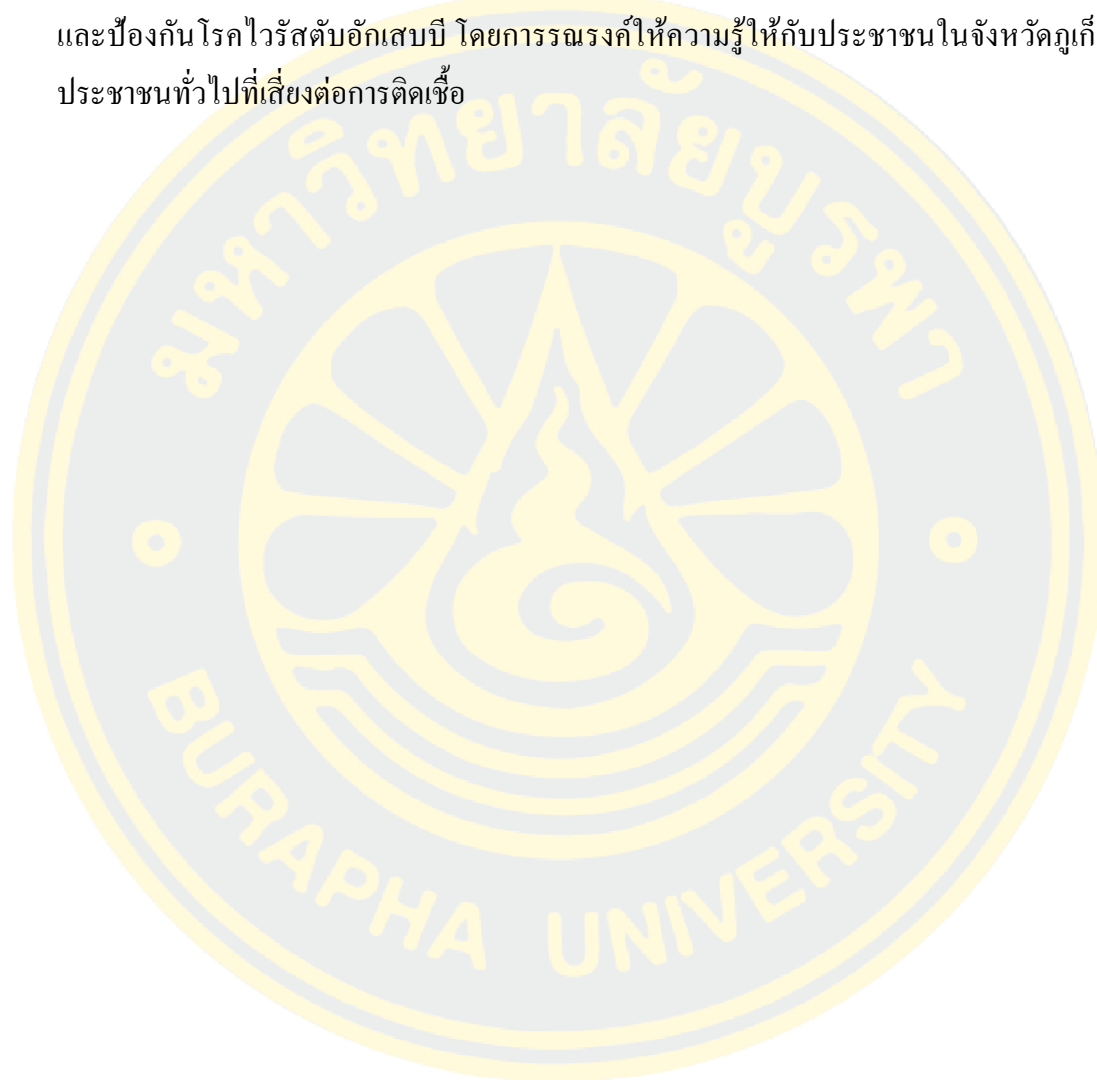
ภาพที่ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี

## ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. นำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีผลมาจากการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคในเขตจังหวัดภูเก็ตและจังหวัดอื่น ๆ
2. สามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายการระบาดของโรคให้ง่ายต่อความเข้าใจมากยิ่งขึ้น
3. สามารถนำผลของการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ให้ความรู้ที่มีผลต่อการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ไปเป็นแนวทางในการศึกษาตัวแบบคณิตศาสตร์โรคอื่น ๆ ได้

4. สามารถนำผลวิจัยที่ได้นำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักกระบวนวิชา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข

5. สามารถนำผลวิจัยที่ได้เสนอต่อหน่วยงานด้านสาธารณสุขดำเนินการมาตรการควบคุมและป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้ให้กับประชาชนในจังหวัดภูเก็ตและประชาชนทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



## บทที่ 2

### งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และความรู้พื้นฐานในงานวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการนำความรู้ด้านคณิตศาสตร์และกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ต่อการพัฒนาทางด้านการแพทย์และสาธารณสุข ในด้านการป้องกันการแพร่ระบาดของโรคติดต่อ ดังนั้นในการทำงานวิจัยจึงต้องศึกษาค้นคว้าเนื้อหาและเอกสารที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นแนวทางในการทำงานวิจัย โดยมีเอกสารที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

- 1) โรคไวรัสตับอักเสบบี
- 2) ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์
- 3) การวิเคราะห์แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์
- 4) งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

#### โรคไวรัสตับอักเสบบี

##### ลักษณะของโรค

ไวรัสตับอักเสบบี (Hepatitis B Virus, HBV) เป็นหนึ่งในสาเหตุหลักที่ทำให้เกิดตับอักเสบบีที่เรียกว่าตับอักเสบบี (Hepatitis B) ซึ่งทำให้มีความเสี่ยงในการพัฒนาเป็นโรคตับแข็งและมะเร็งตับ โดยข้อมูลจากองค์การอนามัยโลกปี 2562 พบว่าทั่วโลกมีผู้ป่วยที่มีภาวะตับอักเสบบีเรื้อรัง (Chronic Hepatitis B) มากกว่า 240 ล้านคน และในทุก ๆ ปีจะมีผู้ติดเชื้อ HBV มากกว่า 6 แสนราย เสียชีวิตเนื่องจากโรคแทรกซ้อนที่เกิดจากภาวะตับอักเสบบีเรื้อรังรวมทั้งโรคตับแข็งและมะเร็งตับ

โรคไวรัสตับอักเสบบี เป็นโรคที่คนไทยรู้จักกันมานาน แต่กลับไม่ค่อยได้ให้ความสำคัญมากนัก อาจเป็นเพราะไม่มีความรู้โรคไวรัสตับอักเสบบีนั้นจัดเป็นโรคร้ายแรงชนิดหนึ่ง แม้อาการของโรคจะไม่รุนแรงก็ตาม ทั่วโลกมีผู้ติดเชื้อไวรัสชนิดนี้มากกว่า 350 ล้านคนและเป็นสาเหตุให้เกิดภาวะตับอักเสบบีเรื้อรัง ซึ่งอาจก่อให้เกิดมะเร็งตับตามมา ส่งผลให้ในปัจจุบันการติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบีถือเป็นปัญหาด้านสาธารณสุขที่สำคัญของโลกไปแล้ว

ประเทศไทยเองเป็นประเทศที่มีโรคไวรัสตับอักเสบบีชุกชุมมากที่สุดแห่งหนึ่งของโลก โดยมีผู้ที่เป็นพาหะ หรือผู้ที่มีเชื้อไวรัสอยู่ในกระแส เลือดถึงร้อยละ 7 ของประชากรทั้งหมด หรือประมาณ 9 ล้านคน ขณะที่ ทั่วโลกมีการประมาณการกันว่ามีผู้ที่เป็นพาหะของเชื้อไวรัสตับ

อีกเสบมีมากกว่า 350 ล้านคน และร้อยละ 75 เป็นคนเอเชีย (ศูนย์ข้อมูลโรคติดเชื้อและพาหะนำโรค ,2562)

### ชนิดและอาการของโรค

เชื้อไวรัสตับอักเสบบีอยู่ด้วยกันหลายชนิด ชนิดเอ บี ซี ดี อี แต่เหตุผลที่ต้องให้ความสำคัญกับไวรัสตับอักเสบบีเป็นพิเศษนั้น ไวรัสตับอักเสบบีทำให้ผู้ได้รับเชื้อ มีแนวโน้มที่จะเกิดภาวะตับอักเสบเรื้อรัง ตับแข็ง และร้ายแรงจนอาจกลายเป็นมะเร็งตับในที่สุด ในบ้านเรา ผู้ป่วยโรคมะเร็งตับส่วนใหญ่ ประมาณร้อยละ 90 มีประวัติเป็นโรคไวรัสตับอักเสบบีมาก่อน สิ่งที่น่ากลัวของไวรัสตับอักเสบบีคือ เมื่อมีการรับเชื้อเข้าสู่ร่างกายส่วนมากผู้ที่ได้รับเชื้อจะไม่รู้ตัว เนื่องจากไม่มีอาการป่วยใด ๆ ปรากฏ การดำเนินของโรคจึงเป็นไปอย่างเงียบ ๆ บางรายอาจมีไข้ หรือปวดเมื่อยเนื้อตัวซึ่งทำให้เข้าใจผิดไปได้ว่าเป็นเพียงไข้หวัดธรรมดา เนื่องจากไวรัสตับอักเสบบี เป็นดีเอ็นเอไวรัสชนิดหนึ่ง ซึ่งต้องอาศัยนิวเคลียสของตับเพื่อพัฒนาเป็นตัวไวรัสที่สมบูรณ์ พอพัฒนาตัวเองได้สมบูรณ์แล้วเชื้อจะกระจายอยู่ในกระแสเลือดแล้วแพร่เชื้อสู่เซลล์อื่น ๆ ต่อไป

โรคไวรัสตับอักเสบบีนั้นแบ่งได้เป็น 2 ชนิด คือ แบบเฉียบพลัน (เป็นแล้วหายภายใน 6 เดือน) และแบบเรื้อรัง (เป็นนานกว่า 6 เดือน) สำหรับแบบเฉียบพลัน เมื่อมีการรับเชื้อไปแล้วราว 2 - 3 เดือน จะมีอาการเป็นไข้ เป็นหวัด ปวดเมื่อยตามตัว หลังจากนั้นประมาณ 1 สัปดาห์จะมีอาการตับอักเสบ ตัวเหลือง ตาเหลือง ถ้าตรวจดูจะมีค่าการทำงานของตับสูงกว่าปกติ อาการพวกนี้จะดีขึ้นภายใน 2 - 3 สัปดาห์ หลังจากนั้นร่างกายจะสร้างภูมิคุ้มกันขึ้นมา และผู้ป่วยส่วนมาก จะไม่กลับมาเป็นโรคไวรัสตับอักเสบบีอีก แต่ถ้าภูมิคุ้มกันไม่สามารถจัดการกับเชื้อไวรัสได้ ก็จะถูกกลายเป็นโรคไวรัสตับอักเสบบีเรื้อรังซึ่ง อาจส่งผลให้ผู้ป่วยเป็นโรคตับแข็งและมะเร็งตับต่อไป (รศ.นพ.วีระศักดิ์ ว่องไพฑูรย์,2551)

### การติดต่อและการป้องกันโรค

เชื้อไวรัสตับอักเสบบีนั้นติดต่อกันได้ผ่านทางช่องทางสำคัญ 3 ทาง ได้แก่ การมีเพศสัมพันธ์โดยไม่ได้อุปกรณ์ การรับเลือดหรือ สารคัดหลั่งของร่างกายจากผู้เป็นพาหะ เช่นการใช้ของปะปนกัน เช่น แปรงสีฟัน เข็มฉีดยา มีดโกน และถ่ายทอจากมารดาสู่บุตร กรณีนี้ มีโอกาสสูงที่จะติดเชื้อได้ในระหว่างคลอด ดังนั้นวิธีที่ดีที่สุดในการรับมือ กับเชื้อไวรัสตับอักเสบบีคือการหลีกเลี่ยงปัจจัยเสี่ยง ทุกประการและเข้ารับการตรวจร่างกายจาก แพทย์อย่างสม่ำเสมอ

การป้องกันโรคโดยระวังตัวเองไว้ เวลาทานข้าวร่วมกับคนอื่นต้องใช้ช้อนกลางและไม่ใช้ของมีคมหรือแปรงสีฟันร่วมกับใคร ที่สำคัญควรมีการตรวจเลือดด้วย วิธีนี้เป็นวิธีการเดียวที่จะทราบได้ว่าใครมีเชื้อไวรัสอยู่บ้างซึ่งส่วนมากผู้ป่วย จะทราบว่าตัวเองมีเชื้อก็ตอนที่มาตรวจสุขภาพ

ประจำปีหรือไม่ก็ตอนที่มิ อากาดีซ่าน ตัวเหลือง ตาเหลือง มีไข้ อ่อนเพลีย เบื่ออาหาร ฯลฯ (การุณย์, 2560)

## ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

### ความหมายของการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

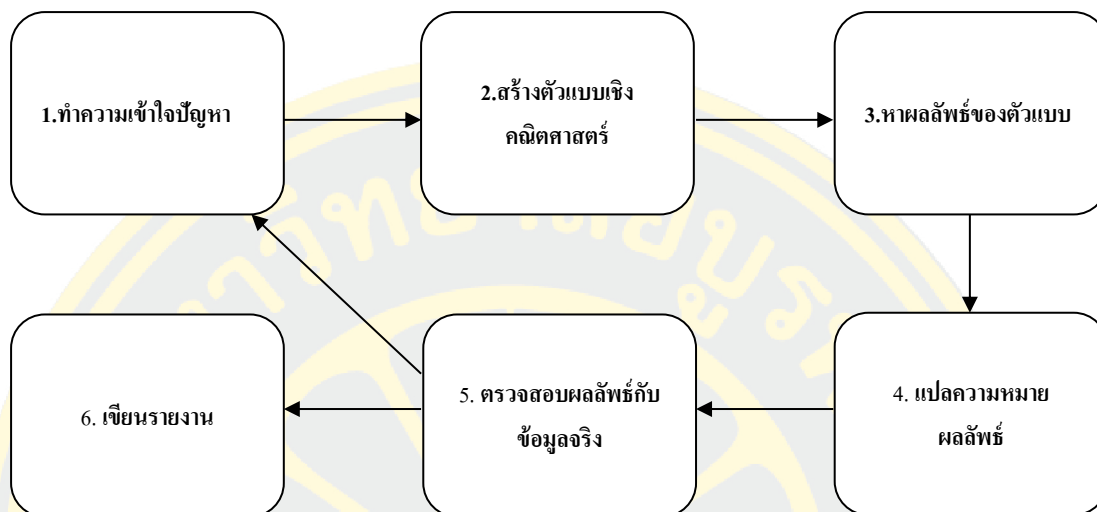
ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า ตัวแบบ (Model) เป็นสิ่งที่ถูกใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน ทั้งทางด้านฟิสิกส์ ชีววิทยา สังคมศาสตร์ จิตวิทยา เคมี เศรษฐศาสตร์ ฯลฯ ตัวแบบเหล่านี้แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของค่าของข้อมูลต่าง ๆ ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์

การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Modeling) เป็นกิจกรรมที่แปลงปัญหาที่เกิดขึ้นจริงให้อยู่ในรูปของสมการคณิตศาสตร์เพื่อต่อการวิเคราะห์ วิจัย และการดำเนินงานในภายหลัง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จะถูกสร้างขึ้นมาจากเสร็จสิ้นกระบวนการ และคำอธิบายที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบนี้จะแสดงให้เห็นถึงข้อมูลอันเป็นประโยชน์ต่อปัญหาที่ต้องการแก้ไข ปัญหาที่เกิดขึ้นในโลกมีมากมาย ปัญหาเหล่านี้มาจากแหล่งที่มาที่แตกต่างกันและมีความยากง่ายของปัญหาแตกต่างกันด้วย ตั้งแต่การตัดสินใจวางสินค้าในตลาดไปจนถึงการจัดสรรงบประมาณของรัฐบาล นักคณิตศาสตร์ที่มีความชำนาญทางด้าน การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จึงทำงานในวงการอุตสาหกรรม การแพทย์และการค้าในหลากหลายสาขา อย่างไรก็ตาม มีสถานการณ์ธรรมดามากมาย ทั้งที่ทำงาน บ้าน หรือแม้แต่สถานที่พักผ่อนหย่อนใจ ซึ่งจำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ไขปัญหา และไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม การแปลความหมายจากปัญหาให้กลายเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ก็มีความสำคัญในการสร้างตัวแบบ

ผู้คนมากมายคิดว่าการแก้สมการมีความสำคัญมากที่สุดในการสร้างตัวแบบ แต่ในความเป็นจริง การแปลความหมายที่มีประสิทธิภาพเพื่อเปลี่ยนปัญหาให้เป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์นั้น เป็นกระบวนการที่มีความสำคัญมากที่สุดในการสร้างตัวแบบ ผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบมักจะอยู่ในรูปของการใช้ปฏิบัติจริงเพื่อแก้ไขปัญหา ดังนั้นเนื้อหาสำคัญที่จะเน้นในบทเรียนนี้จะเป็นเรื่องของการทำความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาต่าง ๆ และการปรับเปลี่ยนปัญหาเหล่านั้นให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ (สุกัลยา ศรีสุรินทร์, 2559)

โลกของคณิตศาสตร์เป็นโลกของนามธรรมที่มีการกำหนดสัญลักษณ์แทนนามธรรมเหล่านั้น มีการนิยามข้อตกลงต่าง ๆ เพื่อใช้ในการศึกษาระบบ และพิสูจน์ผลที่ได้เป็นกฎหรือทฤษฎีเพื่อนำไปใช้ ดังนั้นการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ จึงจัดว่าเป็นการจำลองสิ่งที่อยู่ในโลกแห่งความเป็นจริง ให้เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปนามธรรม และใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์

หาคำตอบของตัวแบบเพื่อนำผลกลับไปประยุกต์ใช้กับโลกแห่งความเป็นจริง ซึ่งสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ 6 ขั้นตอน ดังนี้



ภาพที่ 2 กระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์  
(ธีรวัฒน์ นาคะบุตร, 2546: 1)

### ขั้นตอนการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์

#### ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา

การทำความเข้าใจปัญหาเป็นขั้นตอนแรกในการสร้างตัวแบบ ต้องวิเคราะห์ให้ทราบว่าปัญหาคืออะไร มีอะไรบ้างที่เกี่ยวข้องกับปัญหา มีคำถามมากมายที่ต้องทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา ในสถานการณ์จริง เช่น ปัญหานี้ต้องการทราบอะไร มีวัตถุประสงค์และเป้าหมายอะไร จะตัดสินใจผลที่ออกมาอย่างไร แหล่งข้อมูลมาจากไหน เชื่อถือได้หรือไม่ มีคำตอบเป็นแบบเดียวหรือไม่ จำแนกปัญหาว่าเป็น แบบมีคำตอบแน่นอน (Deterministic) หรือ แบบมีคำตอบไม่แน่นอน (Stochastic) ต้องใช้การสร้างสถานการณ์จำลอง (Simulation) หรือไม่ คำถามหรือคำตอบ ดังกล่าวมาแล้วต้องนิยาม กำหนดขอบเขต ให้ตรงประเด็นและชัดเจน

#### ขั้นที่ 2 สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ จากปัญหาที่ได้วิเคราะห์หรือทำให้ชัดเจนแล้วในขั้นที่ 1 ทดลองสร้างตัวแบบที่ซับซ้อนน้อยที่สุดก่อน เขียนแผนภาพตามความเหมาะสม เขียนรายการปัจจัยที่เกี่ยวข้อง รวบรวมข้อมูลและทดสอบเนื้อหารายละเอียด อธิบายพฤติกรรมของตัวแปร รวบรวมข้อมูลเพิ่มเติมถ้าจำเป็น แสดงตัวแปรแต่ละตัวด้วยสัญลักษณ์ที่

เหมาะสมพร้อมทั้งกำหนดหน่วย กำหนดข้อสมมติที่ต้องการสร้าง เขียนความสัมพันธ์และสมการของตัวแปรในโจทย์โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น การเป็นสัดส่วน ความสัมพันธ์เชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ความสัมพันธ์จากการทดลอง กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน สมการเชิงผลต่างและสมการเชิงอนุพันธ์ เมตริกซ์ ความน่าจะเป็น การกระจายเชิงสถิติ เป็นต้น

### ขั้นที่ 3 หาผลลัพธ์ของตัวแบบ

การหาคำตอบทางคณิตศาสตร์ของตัวแบบ อาจจะใช้วิธีเกี่ยวกับพีชคณิต หรือใช้วิธีเชิงตัวเลข ใช้แคลคูลัสและกราฟ เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ หรือใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่เหมาะสม หาค่าของตัวแปรที่ต้องการ อาจจะเป็นรูปแบบตารางหรือรูปภาพ

### ขั้นที่ 4 แปลความหมายของผลลัพธ์

ขั้นตอนนี้เป็นการแปลความหมาย และตรวจสอบผลลัพธ์ที่หาได้ จากวิธีการเชิงคณิตศาสตร์ เช่น พิจารณาค่าของตัวแปรที่หาได้ ว่ามีเครื่องหมาย และขนาดถูกต้องหรือไม่ มีค่าเพิ่มหรือลดตามที่ควรจะเป็นหรือไม่ พิจารณาค่ามากและค่าน้อยของตัวแปรเพื่อตรวจสอบพฤติกรรมความไวต่อสิ่งกระตุ้น ได้คำตอบที่ดีที่สุดตามที่คาดไว้หรือไม่ หรือต้องเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้น

### ขั้นที่ 5 ตรวจสอบผลลัพธ์กับข้อมูลจริง

ผลลัพธ์ที่ได้สามารถตรวจสอบกับข้อมูลจริงได้หรือไม่ คำตอบเชิงคณิตศาสตร์มีความหมายหรือไม่ การทำนายสอดคล้องกับข้อมูลจริงหรือไม่ ประเมินตัวแบบที่สร้างขึ้นว่าได้ครบตามวัตถุประสงค์หรือไม่ ตัวแบบสามารถปรับปรุงให้ดีขึ้นได้อีกหรือไม่ ผลลัพธ์ที่ได้ก่อนหน้านี้ชี้ให้เห็นว่าต้องคำนวณหาค่าตัวแปรจากตัวแบบที่ปรับปรุงใหม่เพื่อความแม่นยำที่ดีกว่าหรือไม่ ถ้าต้องการทำใหม่ก็ต้องกลับไปเริ่มที่ขั้นที่ 1 หรือถ้าไม่ต้องการก็ให้ไปที่ขั้นที่ 2 ซึ่งเป็นขั้นตอนที่สำคัญมาก เพราะมีบ่อยครั้งที่ต้องสร้างตัวแบบหลายรอบก่อนที่จะได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

### ขั้นที่ 6 เขียนรายงาน

การเขียนรายงานต้องทราบว่าเขียนเพื่อใคร ผู้อ่านต้องการทราบอะไร ต้องการรายละเอียดในรายงานมากน้อยเพียงใด จะสร้างรายงานอย่างไร จึงจะทำให้ลักษณะที่สำคัญชัดเจน และผลที่ต้องการทราบปรากฏอยู่ (ธีรวัฒน์ นาคะบุตร, 2546: 1-4)

## ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พื้นฐาน 4 ตัวแบบ เพื่อใช้เป็นแนวทางในการทำวิจัย ดังนี้

1. ตัวแบบ SIS (Susceptible – Infectious - Susceptible) เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่แบ่งประชากรที่ศึกษาออกเป็น 2 กลุ่มคือ

1.1 กลุ่ม susceptible เป็นกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ซึ่งไม่เคยติดเชื้อ และสามารถที่จะได้รับเชื้อ เมื่อได้รับเชื้อแล้วก็จะกลายเป็นกลุ่มที่ติดเชื้อ (Infected)

1.2 กลุ่ม Infectious เป็นกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อไปยังกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อได้ กลุ่มที่ติดเชื้อสามารถหายจากการติดเชื้อ แล้วกลายเป็นกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible) อีกครั้ง

## 2. ตัวแบบ SIR (Susceptible – Infectious – Recovered)

สมมติฐานที่สำคัญของตัวแบบคณิตศาสตร์ของการระบาดจำนวนมาก นั่นคือประชากรสามารถแบ่งออกเป็นกลุ่มที่แตกต่างกัน กลุ่มประชากรเหล่านี้จะถูกกำหนดสถานะของโรค ซึ่งเป็นตัวแบบพื้นฐานอธิบายโดย Kermack, W. O. and McKendrick, A. G., 1927 ประกอบด้วย 3 กลุ่ม คือ

1) กลุ่ม Susceptible เป็นกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ซึ่งไม่เคยติดเชื้อ และสามารถที่จะได้รับเชื้อ เมื่อได้รับเชื้อแล้วก็จะกลายเป็นกลุ่มที่ติดเชื้อ (Infected)

2) กลุ่ม Infectious เป็นกลุ่มที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อไปยังกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อได้ กลุ่มที่ติดเชื้อก็จะอยู่ในระยะที่ติดเชื้อ หลังจากนั้นก็จะกลายเป็นกลุ่มที่มีภูมิคุ้มกัน

3) กลุ่ม Recovered เป็นกลุ่มที่มีภูมิคุ้มกันก็จะถือว่ามีภูมิคุ้มกันสำหรับชีวิตแล้ว

## 3. ตัวแบบ SEIR (Susceptible –Exposed- Infectious – Recovered)

กลุ่มประชากรและลักษณะของการเกิดโรคซึ่งกำหนดให้จำนวนประชากรมีขนาดคงที่ โดยจะแบ่ง ประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และกลุ่มประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ

## 4. ตัวแบบ SIQR (Susceptible –Infectious – Quarantine - Recovered)

กลุ่มประชากรและลักษณะของการเกิดโรคซึ่งกำหนดให้จำนวนประชากรมีขนาดคงที่ โดยจะแบ่ง ประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่มีการกักกัน และกลุ่มประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ (Anderson, Roy M., and Robert M. May, 1991)

## การวิเคราะห์แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์

### เมทริกซ์และการดำเนินการทางเมทริกซ์

**บทนิยาม 2.3.1** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 21) ให้  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก เมทริกซ์ คือ ชุดของจำนวน  $m \times n$  ตัว ซึ่งเขียนเรียงกัน  $m$  แถว และ  $n$  หลัก ภายในเครื่องหมายวงเล็บ ในรูปแบบ



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เรียก  $a_{ij}$  ว่าเป็นสมาชิก (Entry) ในแถวที่  $i$  หลักที่  $j$  ของเมตริกซ์ หรือเรียกว่าเป็นสมาชิกในตำแหน่งที่  $ij$  ของเมตริกซ์ เมื่อ  $i=1, 2, 3, \dots, m$  และ  $j=1, 2, 3, \dots, n$

เรียกเมตริกซ์ที่มี  $m$  แถว  $n$  หลัก ว่าเป็น  $m \times n$  เมตริกซ์ และเรียก  $m \times n$  ว่าเป็นมิติของเมตริกซ์

**บทนิยาม 2.3.2** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 23) ให้  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  และ  $c$  เป็นค่าคงตัว ผลคูณของ  $c$  กับเมตริกซ์  $A$  คือ เมตริกซ์  $[b_{ij}]_{m \times n}$  เมื่อ  $b_{ij} = ca_{ij}$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,\dots,m$  และ  $j=1,2,3,\dots,n$  เขียนแทนผลคูณ ของ  $c$  ด้วยเมตริกซ์  $A$  ด้วย  $cA$

**บทนิยาม 2.3.3** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 23) ให้  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [B_{ij}]_{m \times n}$  และ  $\alpha, \beta$  เป็นค่าคงตัว  $\alpha A - \beta B = [c_{ij}]_{m \times n}$  เมื่อ  $c_{ij} = \alpha a_{ij} - \beta b_{ij}$  สำหรับ  $i=1,2,3,\dots,m$  และ  $j=1,2,3,\dots,n$

**บทนิยาม 2.3.4** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 24) ถ้า  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  และ  $B = [b_{ij}]_{n \times r}$  ผลคูณของ  $A$  และ  $B$  เขียนแทนด้วย  $AB$  แล้ว  $AB = [c_{ij}]_{m \times r}$  เมื่อ  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,\dots,m$  และ  $j=1,2,3,\dots,r$  นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kr} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{2k} b_{kr} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kr} \end{bmatrix}$$

**บทนิยาม 2.3.5** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 33) ให้  $A$  เป็นเมตริกซ์ขนาด  $m \times n$  จะเรียกเมตริกซ์ที่ได้จากการเปลี่ยนสมาชิกของ  $A$  จากแถวเป็นหลัก หรือเปลี่ยนจากหลักเป็นแถวว่า เมตริกซ์สลับเปลี่ยนของ  $A$

**บทนิยาม 2.3.6** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 30) เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) คือเมตริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกในแถวทแยงมุมหลักทุกตัวเป็น 1 นั่นคือ  $[a_{ij}]_{m \times n}$  เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ แล้ว  $a_{ij} = 1$  ทุกค่า  $i = j$  และ  $a_{ij} = 0$  ทุกค่า  $i \neq j$

**บทนิยาม 2.3.7**(กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 30) ให้  $A$  เป็น  $n \times n$  เมตริกซ์ ถ้า  $B$  เป็น  $n \times n$  เมตริกซ์ที่มีสมบัติว่า  $AB = I_n = BA$  แล้วจะเรียก  $B$  ว่าอินเวอร์สการคูณของ  $A$  และเขียนแทน  $B$  ด้วย  $A^{-1}$

**บทนิยาม 2.3.8** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 51) ให้  $A = [a_{ij}]$  เรียก  $|a_{ij}|$  หรือ  $\det(A)$  ว่าเป็นดีเทอร์มิแนนต์ของ  $A$

**บทนิยาม 2.3.9** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 65) ให้  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  เมื่อ  $n \geq 2$  ไมเนอร์ของ  $a_{ij}$  คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  ของ  $A$  ออก เขียนแทนไมเนอร์ของ  $a_{ij}$  ด้วย  $M_{ij}(A)$

**บทนิยาม 2.3.10** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 65) ให้  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  เมื่อ  $n \geq 2$  ตัวประกอบร่วมเกี่ยวของของ  $a_{ij}$  คือ ผลคูณของ  $(-1)^{i+j}$  และ  $M_{ij}(A)$  เขียนแทนตัวประกอบร่วมเกี่ยวของของ  $a_{ij}$  ด้วย  $C_{ij}(A)$

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$$

**บทนิยาม 2.3.11** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552 หน้า 66) ถ้า  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด  $n \times n$  แล้ว เมตริกซ์ผกผัน (Adjoins matrix) ของ  $A$  เขียนแทนด้วย  $\text{adj}(A)$  คือ เมตริกซ์ขนาด  $n \times n$  ซึ่งมีสมาชิกในตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  เป็นตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ  $C_{ji}(A)$  ของ  $a_{ij}$

**ทฤษฎีบท 2.3.12** (สุภาวินี สัตยภรณ์, 2552) ให้  $A$  เป็น  $n \times n$  เมตริกซ์ จะได้ว่า

$$(1) A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = \det(A)I$$

$$(2) A \text{ มีอินเวอร์สการคูณ ก็ต่อเมื่อ } \det(A) \neq 0$$

$$\text{จะได้ว่า } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{adj}A)$$

**ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงที่**

**(Homogeneous Linear System with Constant Coefficients)**

ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

หรือ 
$$X'(t) = AX(t) \quad (2.1)$$

โดยที่  $A$  เป็นเมตริกซ์คงที่ขนาด  $n \times n$  และ  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  เป็นเมตริกซ์ของตัวแปร จะได้ว่าถ้า  $X(t) = Ke^{\lambda t}$  เป็นเวกเตอร์ผลเฉลยของระบบสมการ (2.1) แล้ว  $X'(t) = K\lambda e^{\lambda t}$  เมื่อแทน  $X(t)$  และ  $X'(t)$  ลงใน  $X'(t) = AX(t)$  จะได้

$$K\lambda e^{\lambda t} = AKe^{\lambda t} \quad (2.2)$$

เนื่องจาก  $e^{\lambda t} \neq 0$  นำ  $e^{\lambda t}$  หารตลอด จะได้

$$\begin{aligned} K\lambda &= AK \\ (A - \lambda I)K &= 0 \end{aligned}$$

โดยที่  $\lambda$  เป็นค่าเฉพาะและ  $K$  เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกับ  $\lambda$  ซึ่งหาได้จาก

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

**ทฤษฎีบท 2.3.13** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552) ให้  $A$  เป็นเมตริกซ์จัตุรัส  $n \times n$  จะได้ว่า  $\lambda$  เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ  $A$  ก็ต่อเมื่อ  $\det(A - \lambda I_n) = 0$

**ทฤษฎีบท 2.3.14** (กรรณิกา เกียนวัฒนา, 2552) ให้  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันจำนวน  $n$  ตัวและเป็นค่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์  $A$  ของ

$$X'(t) = AX(t) \text{ และให้ } K_1, K_2, \dots, K_n \text{ เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกับ } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

แล้วผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.2) บนช่วง  $(-\infty, \infty)$  คือ

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t} \text{ เมื่อ } c_1, c_2, \dots, c_n \text{ เป็นค่าคงที่}$$

สำหรับบางกรณีที่  $\lambda$  มีรากซ้ำ ซึ่งหมายถึง ถ้า  $m$  เป็นจำนวนเต็มบวกและ  $(\lambda - \lambda_1)^m$  เป็นตัวประกอบของสมการลักษณะเฉพาะแล้วเรียกค่าเฉพาะ  $\lambda_1$  ว่า Eigenvalue of multiplicity  $m$  โดยผลเฉลยพิจารณาจากสองกรณีดังนี้

1. สำหรับบางเมตริกซ์  $A$  ขนาด  $n \times n$  มีค่าเฉพาะ  $\lambda_1$  ซ้ำกัน  $m$  ครั้ง ซึ่ง  $m \leq n$  และมีเวกเตอร์เฉพาะที่เป็นอิสระเชิงเส้นที่สอดคล้องกับ  $\lambda_1$  จะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปเขียนอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้น  $c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}$

2. ถ้ามีเวกเตอร์เฉพาะ  $K$  เพียงเวกเตอร์เดียวที่สอดคล้องกับ  $\lambda_1$  ซ้ำกัน  $m$  ครั้ง ผลเฉลยทั่วไปที่เป็นอิสระเชิงเส้นจะอยู่ในรูป

$$X_1 = K_{11}e^{\lambda_1 t}$$

$$X_2 = K_{21}te^{\lambda_1 t} + K_{22}e^{\lambda_1 t}$$

$$X_3 = K_{31}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + K_{32}te^{\lambda_1 t} + K_{33}e^{\lambda_1 t}$$

⋮

$$X_m = K_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + K_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \dots + K_{mm}e^{\lambda_1 t}$$

ซึ่ง  $K_{ij}$  เป็นเวกเตอร์หลักที่สามารถหาได้ด้วยวิธีต่อไปนี้

2.1. ถ้า  $m=2$  จะได้ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นเขียนอยู่ในรูป

$$X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$$

โดยที่  $K$  และ  $P$  หาได้จากสมการ

$$(A - \lambda_1 I)K = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)P = K$$

2.2. ถ้า  $m=3$  และ  $P$  จะได้ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นเขียนอยู่ในรูป

$$X_3 = K\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + Pte^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t}$$

โดยที่  $K$  และ  $P$  หาได้จากสมการ

$$(A - \lambda_1 I)K = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)P = K$$

$$(A - \lambda_1 I)Q = P$$

**บทนิยาม 2.3.15** ให้  $A$  เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด  $n \times n$  ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนและให้  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  เป็นค่าเฉพาะของเมตริกซ์  $A$  แล้ว Spectral radius ของเมตริกซ์  $A$  เขียนแทนด้วย  $\rho(A) = \max(|\lambda_i|)$  สำหรับ  $i=1,2,3,\dots,n$  เมื่อ  $|\lambda_i|$  คือค่าสัมบูรณ์ของ  $\lambda_i$

### วิธี Next Generation Matrix

ในการหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic reproductive number:  $R_0$ )

สามารถใช้วิธี Next Generation เพื่อคำนวณค่า  $R_0$  โดยทำได้ดังนี้

(Van den Driessche and Watmough, 2002)

1. พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น นำมาเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - V(x) \quad \text{ซึ่ง} \quad F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V(x) = \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \\ \vdots \\ V_n(x) \end{bmatrix}$$

โดยที่  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ซึ่งทุก ๆ  $x_i \geq 0$  เป็นจำนวนของประชากรในแต่ละกลุ่ม

$F_i(x)$  คือ อัตราการปรากฏของการติดเชื้อใหม่ในกลุ่ม  $i$

$V_i^+(x)$  คือ อัตราการถ่ายทอดเฉพาะบุคคลภายในกลุ่ม  $i$

$V_i^-(x)$  คือ อัตราการถ่ายทอดเฉพาะบุคคลภายนอกกลุ่ม  $i$

ซึ่ง  $V_i(x) = V_i^-(x) - V_i^+(x)$  และฟังก์ชัน  $F_i(x), V_i^-(x), V_i^+(x)$  สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

1) ถ้า  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ทุก ๆ  $x_i \geq 0$  แล้ว  $F_i(x), V_i^-(x), V_i^+(x) > 0$

สำหรับ  $i=1,2,3,\dots,n$

2) ถ้า  $x \in X_s = \{x | x_i \geq 0, x_i = 0, i=1,2,3,\dots,m\}$  ซึ่ง  $m < n$  แล้ว  $V_i^-(x) = 0$

สำหรับ  $i=1,2,3,\dots,m$

3) ถ้า  $i > m$  แล้ว  $F_i(x) = 0$

4) ถ้า  $x \in X_s$  แล้ว  $F_i(x) = 0$  และ  $V_i^+(x) = 0$  สำหรับ  $i=1,2,3,\dots,m$

2. หา Jacobean Matrix ของ  $F(x)$  และ  $V(x)$  ซึ่งให้  $DF(x)=F$  และ  $DV(x)=V$  แล้วแทนค่าที่  $x = x_0$  จะได้  $F$  และ  $V$  ดังนี้

$$F = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \quad \text{และ} \quad V = \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \quad \text{ซึ่ง} \quad i \leq j, j \leq m$$

จะได้ว่า  $F$  เป็นเมตริกซ์เอกฐาน และ  $v$  เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน (เมตริกซ์  $V = [v_{ij}]$  จะกล่าวว่าเป็น M-matrix ก็ต่อเมื่อ  $v_{ij} \leq 0$  สำหรับ  $i \neq j$  และทุก ๆ ค่าเฉพาะของ  $V$  มีส่วนจริงเป็นบวก)

3. เนื่องจาก  $V$  เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน จึงนำ  $V$  มาหา  $V^{-1}$

4. หา  $FV^{-1}$

5. หา Spectral radius ของ  $FV^{-1}$  จะได้ค่าระดับการติดเชื้อ

**ทฤษฎีบท 2.3.17** Routh-Hurwitz Criteria (Leah Edelstein – Keshet, 1998)

กำหนดสมการลักษณะเฉพาะ  $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$H_j = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & 0 \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & a_j \end{pmatrix}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์  $a_i$  เป็นจำนวนจริงคงที่โดย  $i=1,2,3,\dots,n$  ถ้า  $a_j=0$  ซึ่ง  $j > n$  แล้วทุกค่าของค่าลักษณะเฉพาะมีส่วนจริงเป็นจำนวนลบนั้นคือจุดสมดุลจะเสถียร ก็ต่อเมื่อ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ทุกเมตริกซ์เป็นบวก  $\det(H_j) > 0, j=1,2,3,\dots,n$

เมื่อ  $n=2$  จะได้ว่า  $\det(H_1) = a_1 > 0$  และ  $\det(H_2) = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_3 > 0$  ซึ่ง

$$a_1 > 0, a_2 > 0$$

สำหรับดีกรีของพหุนาม  $n=1, 2, 3, 4$  และ  $5$  สรุปได้ดังนี้

$$n = 2: a_1 > 0, a_2 > 0$$

$$n = 3: a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$$

$$n = 4: a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

$$n = 5: a_1 > 0, i=1,2,3,4,5, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

$$(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5 (a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_2^5$$

### งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กัลยาณี กัล่ากลิ่น และคณะ (2556) วิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมวสรุปได้ว่าการแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมวคือประชากรกลุ่มนี้ได้รับเชื้อบรูเกียมาลาไยมีจำนวนมากขึ้น 1.7086 เท่าจากจำนวนเริ่มต้นและเมื่อค่าอัตราการกัดของประชากรยุงเท่ากับ 1,450 ครั้ง/วันจะมีค่า  $R_0=2.3595$  จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจึงสรุปได้ว่าการเพิ่มอัตราการกัดของประชากรยุงมีผลทำให้มีการแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมวเพิ่มมากขึ้นจากค่าเริ่มต้น

วิรมณ คุลยะศิริและคณะ (2556) วิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคชิคุนกุนยาที่มีผลกระทบมาจากนักท่องเที่ยวในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ของการแพร่ระบาดของโรคชุกุนยาที่มีผลกระทบมาจากนักท่องเที่ยว ผลการวิจัยพบว่าระยะเวลาการอาศัยอยู่ของนักท่องเที่ยวและอัตราการเดินทางเข้ามาของนักท่องเที่ยวมีผลต่อการแพร่ระบาดของโรคชุกุนยาเมื่อนักท่องเที่ยวอาศัยอยู่เป็นเวลานานก็จะมีผลให้การแพร่ระบาดเพิ่มขึ้นและเมื่อนักท่องเที่ยวเดินทางเข้ามาในพื้นที่มากขึ้นก็ทำให้การแพร่ระบาดเพิ่มขึ้นเช่นกัน ข้อเสนอแนะจากการวิจัย อัตราการเดินทางเข้าและระยะเวลาการอาศัยอยู่ของนักท่องเที่ยวในแต่ละพื้นที่อาจแตกต่างกัน ดังนั้นในการที่จะควบคุมโรคให้มีการระบายน้อยลงจะต้องมีการควบคุมจำนวนนักท่องเที่ยวที่เดินทางเข้ามายังพื้นที่ให้อยู่ในระดับที่เหมาะสม

ณัฐกร จันทร์ชัยและคณะ (2558) วิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน จากการศึกษาพบว่าค่า  $g(T)$  หรือค่าปริมาณน้ำฝนนั้นมีผลกระทบกับจำนวนผู้ที่ติดเชื้อดังนั้นค่า  $g(T)$  ที่มีค่ามากจะส่งผลให้จำนวนผู้ที่ติดเชื้อมีจำนวนมากและค่า  $g(T)$  ที่มีค่าน้อยจะส่งผลให้จำนวนผู้ที่ติดเชื้อมีจำนวนน้อยหากเราสามารถคำนวณหาค่า  $g(T)$  ที่มีความเหมาะสมกับช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งได้เราก็สามารถที่จะทำการพยากรณ์หาจำนวนผู้ป่วยที่คาดว่าจะเกิดขึ้นในอนาคตได้ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการวางแผนการป้องกันและควบคุมโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยก่อนที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้นจริงในอนาคต

Jantapron Sukawat and Surapol Naowarat (2014) วิจัยเรื่อง Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis พบว่าค่าระดับการติดเชื้อ  $R_0 = \frac{g(T)\beta N}{\mu + \gamma}$  และค่าปริมาณน้ำฝนนั้นมีผลกระทบกับจำนวนผู้ที่ติดเชื้อโดยพบว่าค่าระดับการติดเชื้อ  $R_0 = 0.1212, 6.0598, 7.877$  ตามลำดับเมื่อปริมาณน้ำฝน  $g(T) = 0.01, 0.33, 0.65$  ตามลำดับดังนั้นปริมาณน้ำฝนที่มีค่ามากจะส่งผลให้จำนวนผู้ที่ติดเชื้อมีจำนวนมากและปริมาณน้ำฝนที่มีค่าน้อยจะส่งผลให้จำนวนผู้ที่ติดเชื้อมีจำนวนน้อย

อนุวัตร จิรวัดนพานิช และคณะ (2559ก) วิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย จากการศึกษาพบว่า การสวมหน้ากากอนามัยเป็นผลปัจจัยหนึ่งต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่ โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันน้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันเป็นจำนวนมากจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ ดังนั้นหน่วยงานด้านสาธารณสุขควรแจกหน้ากากอนามัยให้กับผู้ป่วยไข้หวัดใหญ่ และประชาชนทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเป็นจำนวนไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 ของประชากรทั้งหมด

อนุวัตร จิรวัดนพานิชและคณะ (2559ข) วิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใส โดยการรณรงค์ให้ความรู้พบว่าประสิทธิภาพการรณรงค์ให้ความรู้เป็นผลปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใส โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีสุกอีใสมีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคอีสุกอีใสน้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีสุกอีใสมีความรู้เกี่ยวกับการป้องกัน โรคอีสุกอีใสเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้ออีสุกอีใส

สุรัชดา ตั้งข์ทองจีน (2558) วิจัยเรื่องผลของการรณรงค์ให้ความรู้ที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคตาแดงพบว่ามีค่าระดับการติดเชื้อของโรค  $R_0=1.099$  และจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรคค่าพารามิเตอร์ของจำนวนประชากรจะเข้าสู่จุดที่มีโรคแตกต่างกันโดยมีค่า  $S=909.216$ ,  $I=0.0125$  และ  $R=90.77$  จึงสรุปได้ว่าผลของการรณรงค์ให้ความรู้มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคตาแดง

พันธณี พงศ์สัมพันธ์ (2557) แบบจำลองเลียนแบบสำหรับการกระจายของโรคงูสวัดในประเทศไทย พบว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่แตกต่างกันให้ระยะเวลาการระบาดและจำนวนผู้ป่วยที่สูงสุดแตกต่างกันผลที่ได้จากการวิเคราะห์ข้างต้นแสดงถึงแนวทางสำหรับการระบาดของโรคนี้นี้ วิจัยฉบับนี้ได้ศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยในแบบจำลองการระบาดของโรคงูสวัดโดยพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของประชากรคนในประเทศไทย โดยประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐานทำให้ได้เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายในของจุดสมดุลโดยการใช้อนุพันธ์ Routh-Hurwitz ตรวจสอบความเสถียรของจุดสมดุลผลที่ได้จากทฤษฎีทำให้ได้ชุดของค่าพารามิเตอร์ที่สามารถลดการระบาดของโรคได้ซึ่งแสดงในรูปของเงื่อนไขและทำให้ได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานซึ่งครอบคลุมถึงความเสถียรของสภาวะระบาดซึ่งชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ได้นั้นจะมีผลทำให้ลดการระบาดของโรคนี้นี้ผลเฉลยเชิงตัวเลขได้นำมาพิจารณาสำหรับสถานการณ์ที่แตกต่างกันซึ่งในทางการแพทย์นั้นชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ทำให้เกิดความเสถียรนั้นสามารถควบคุมการระบาดของโรคนี้นี้ได้นั่นเอง

บัณฑิตย์ อันยงค์ (2558) ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออกโดยใช้การรณรงค์ให้ความรู้ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต พบว่าผลการรณรงค์ให้ความรู้แก่คนกลุ่มเสี่ยงถึงการป้องกันการกัดของยุงลายและการทำลายแหล่งเพาะพันธุ์ยุงอย่างต่อเนื่องมีผลในการลดจำนวนคนเป็นโรคไข้เลือดออก โดยเฉพาะการตระหนักและให้ความสำคัญต่อการถูกยุงกัด การทำลายแหล่งเพาะพันธุ์ยุงรอบๆที่พักอาศัย การไปพบแพทย์ทันทีที่สงสัยว่าเป็นโรคไข้เลือดออกหรือไม่ การดูแลตนเองของครอบครัว ชุมชนในเบื้องต้น ตลอดจนภาครัฐควรถูกกำหนดมาตรการทั้ง



ระยะยาวในการป้องกัน ประชาสัมพันธ์ การติดตามผล อย่างจริงจังและต่อเนื่อง โดยเฉพาะฤดูฝน หรือฤดูร้อน

บุญยานุช ชั้นไชยวงศ์ (2559) การติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบีเรื้อรัง (Hepatitis B Virus, HBV) เป็นปัญหาสำคัญและเป็นสาเหตุการเกิด โรคมะเร็งตับ บุคลากรทางการแพทย์เป็นกลุ่มที่มีความเสี่ยงต่อการติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบีมากกว่าประชากรทั่วไปเนื่องจากมีโอกาสสัมผัสเลือดและสารคัดหลั่งของผู้ป่วยที่ติดเชื้อขณะทำหัตถการ การศึกษานี้มี วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการติดเชื้อและการมีภูมิคุ้มกันต่อไวรัสตับอักเสบบีในบุคลากรกลุ่มเสี่ยง โรงพยาบาล มะเร็งลำปาง ผลการศึกษาพบว่า กลุ่มประชากรเป็นเพศหญิงร้อยละ 77.4 อยู่ช่วงอายุ 31-40 ปี ร้อยละ 35.7 สังกัดเป็นกลุ่มภารกิจด้านการพยาบาล ร้อยละ 70.6 และ ช่วง ระยะเวลาการทำงานน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 ปี เจ้าหน้าที่กลุ่มเสี่ยงส่วนใหญ่ไม่ติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบีร้อยละ 90.5 และไม่มีประวัติคนในครอบครัวติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบี ร้อยละ 85.5 การมีประวัติคนในครอบครัวติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบีและประวัติการมีภูมิคุ้มกันไวรัสตับอักเสบบีมีความสัมพันธ์กับการติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบี ของเจ้าหน้าที่กลุ่มเสี่ยงโรงพยาบาลมะเร็งลำปางอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ( $p\text{-value} < 0.001$ ) และเพศ ช่วง อายุ กลุ่มงาน ช่วงระยะเวลาการทำงานและประวัติสมาชิกในครอบครัวมีความความสัมพันธ์กับการมีภูมิคุ้มกัน ต่อไวรัสตับอักเสบบีของเจ้าหน้าที่โรงพยาบาลอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ( $p < 0.05$ )

M.Khalid et al.(2014) ได้นำเสนอคำตอบเชิงตัวเลขของตัวแบบ SIR ของโรคไข้เลือดออก เนื่องจากโรคนี้มีความซับซ้อนมากทั้งเป็นการเชื่อมโยงระหว่างคน ยุง และเชื้อไวรัส จากยุงอีกหลายพันตัว ด้วยเหตุนี้ความเข้าใจของการเป็น โรคนี้จึงมีความจำเป็น ดังนั้นจึงได้เทคนิคใหม่อันได้แก่ Perturbation Iteration Method เปรียบเทียบกับวิธี Runge Kutta RK4 Method

Pongsumpan and Tang. (2001) ได้ศึกษาตัวแบบการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออกที่เน้นช่วงของอายุตามสภาพจริงในประเทศไทย ซึ่งอิทธิพลของช่วงอายุในประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อโรคของตัวแบบ SIR ที่ใช้อธิบายการระบาดของ Dengue Hemorrhagic Fever โดยการแบ่งประชากรคนในแต่ละช่วงอายุ และเสนอตัวแบบของแต่ละช่วงอายุ สมมติความแตกต่างของอัตราการการแพร่เชื้อในแต่ละช่วงอายุเพื่อศึกษาอัตราการอุบัติการณ์ของโรค เพื่อเป็นการทำนายอัตราการเกิดอุบัติการณ์ของโรคที่เหมือนกับรูปแบบการเกิดอุบัติการณ์ของโรคของหลายๆจังหวัดในประเทศไทยปี 2543 ผลการศึกษาพบว่าอัตราการแพร่เชื้อของโรคไข้เลือดออกขึ้นอยู่กับอายุ

Sylvestre Aureliano Carvalho et al. (2015) ได้นำเสนอตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออก โดยใช้มาตรการการควบคุมและกำจัดยุงลายและการให้วัคซีน

ป้องกัน พบว่าแม้จะทำให้จำนวนยุงที่ติดเชื้อลดลงแต่เป็นปริมาณที่ไม่เพียงพอกับการแพร่ระบาดของโรคที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว



### บทที่ 3

#### ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การดำเนินการวิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้ (Mathematical Model for Controlling the Spread of Hepatitis B Virus Disease on Education Campaign) ผู้วิจัยศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ผู้วิจัยดำเนินการโดยการพัฒนาตัว

แบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยมีค่าพารามิเตอร์ของการรณรงค์ให้ความรู้ จากนั้นทำการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้โดยการหาจุดสมดุล หาค่า  $R_0$  ตรวจสอบเสถียรภาพ และสุดท้ายทำการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยในบทนี้ผู้วิจัยนำเสนอตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีโดยการรณรงค์ให้ความรู้

### แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์

การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโรคไวรัสตับอักเสบบี จากการศึกษางานวิจัย ผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้ โดยกำหนดประชากรมนุษย์มีจำนวนคงที่ ซึ่งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ดังกล่าวมีข้อตกลงเบื้องต้นดังนี้

ผู้วิจัยได้แบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ

- 1) กลุ่มคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible : S) หมายถึง กลุ่มคนที่ยังไม่ได้รับเชื้อแต่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ
- 2) กลุ่มคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (Expose : E) หมายถึง กลุ่มคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ และไม่สามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้
- 3) กลุ่มคนที่ติดเชื้อแสดงอาการ (Infectious : I) หมายถึง กลุ่มคนที่ติดเชื้อแสดงอาการ และสามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้
- 4) กลุ่มคนที่หายจากโรค (Recovered : R) หมายถึง บุคคลที่ติดเชื้อและมีภูมิคุ้มกันชนิดถาวร หรือเป็นบุคคลที่ถูกแยกตัวออกไปจนมีภูมิคุ้มกัน หรือหายจากโรค

ได้กำหนดตัวแปรดังนี้

$S(t)$  แทน จำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ  $t$  เวลาใด ๆ

$E(t)$  แทน จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ ณ  $t$  เวลาใด ๆ

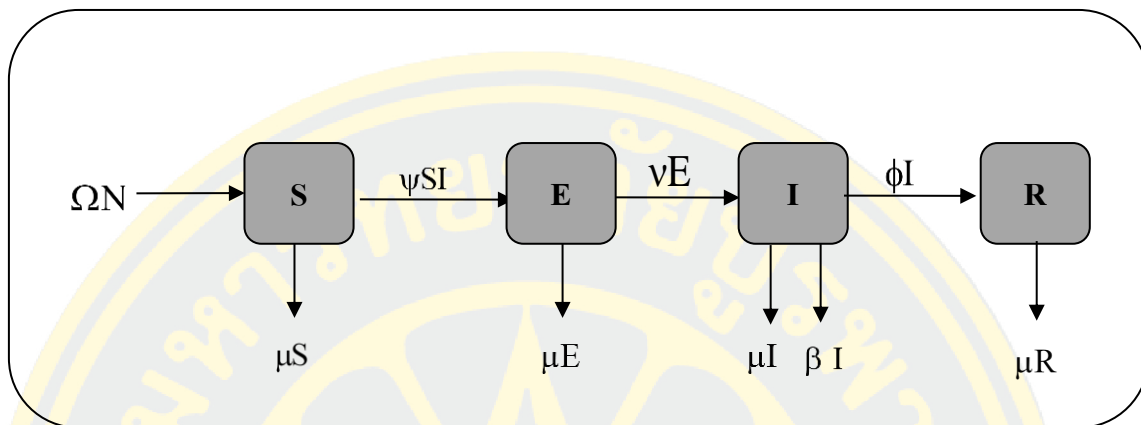
$I(t)$  แทน จำนวนคนที่ติดเชื้อ ณ  $t$  เวลาใด ๆ

$R(t)$  แทน จำนวนคนที่หายป่วยจากโรค ณ  $t$  เวลาใด ๆ

โดยค่าของตัวแปรทั้งสี่ข้างต้นจะต้องเป็นบวกเนื่องจากเป็นจำนวนประชากร จะได้

$S(t) \geq 0, E(t) \geq 0, I(t) \geq 0$  และ  $R(t) \geq 0$  และกำหนดให้ประชากรรวมมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา คือ  $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$  ซึ่งเป็นค่าคงที่

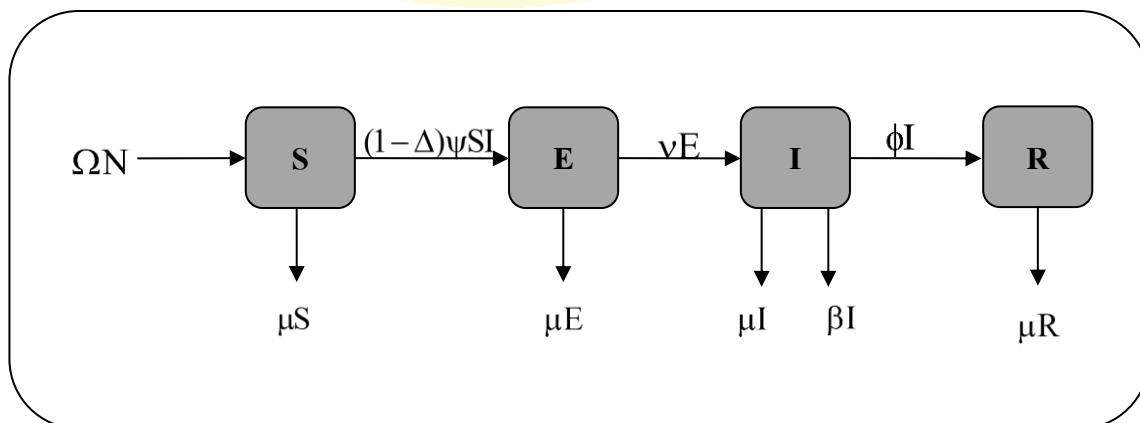
จากตัวแปรข้างต้นผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้



ภาพที่ 3 ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี

เมื่อ  $\Omega$  เป็นอัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์,  $\psi$  เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ,  $\nu$  เป็นอัตราการฟักตัวของเชื้อ,  $\phi$  เป็นอัตราการฟื้นตัว,  $\mu$  เป็นอัตราการตายโดยธรรมชาติ,  $\beta$  เป็นอัตราการตายด้วยโรค และ  $N$  เป็นจำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด

จากภาพที่ 3 ผู้วิจัยได้ดำเนินการเพิ่มค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการศึกษารวมทั้งสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน โดยการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการณรงค์ให้ความรู้ ซึ่งผู้วิจัยสนใจศึกษาประสิทธิภาพการณรงค์ให้ความรู้ ( $\Delta$ ) ดังภาพที่ 4 ดังนี้



ภาพที่ 4 ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีโดยการรณรงค์ให้ความรู้

ดังนั้นตัวแบบของโรคติดต่อที่มีการควบคุมการแพร่ระบาดโดยการรณรงค์ให้ความรู้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (Kermack and McKendrick, 1927) ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \Omega N - (1 - \Delta)\psi SI - \mu S \quad (3.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - \Delta)\psi SI - \nu E - \mu E \quad (3.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \nu E - \phi I - \beta I - \mu I \quad (3.3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \phi I - \mu R \quad (3.4)$$

จากสมการ (3.1) - (3.4) ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยดำเนินการลดรูปสมการจากตัวแปร  $S, E, I, R$  เป็น  $\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}$  เพื่อช่วยให้วิเคราะห์ได้ง่ายขึ้น ดังนี้

$$\text{เมื่อกำหนดให้ } \bar{S} = \frac{S}{N}, \bar{E} = \frac{E}{N}, \bar{I} = \frac{I}{N} \text{ และ } \bar{R} = \frac{R}{N} \text{ สามารถจัดสมการ (3.1) - (3.4)}$$

ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \Omega - [(1 - \Delta)\psi N \bar{S} \bar{I} + \mu \bar{S}] \quad (3.5)$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = (1 - \Delta)\psi N \bar{S} \bar{I} - \bar{E}(\nu + \mu) \quad (3.6)$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \nu \bar{E} - \bar{I}(\phi + \beta + \mu) \quad (3.7)$$

และ  $\bar{R}$  สามารถหาได้จากเงื่อนไข  $\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{R} = 1$  จะได้  $\bar{R} = 1 - (\bar{S} + \bar{E} + \bar{I})$

#### บทที่ 4

#### การวิเคราะห์เชิงคุณภาพ

การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวต่อไปนี้เป็น การวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน (Standards Method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุลนั้น โดยใช้วิธี Next Generation Method และหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการหาขอบเขตของค่าคงที่ (Invariant Region) การหาจุดสมดุล

(Equilibrium Point) การหาจุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point) การหาจุดสมดุลที่มีโรค (Disease Endemic Equilibrium Point) การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number) และการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical analysis)

### พัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์

จากสมการ (3.1) - (3.4) ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยดำเนินการลดรูปสมการจากตัวแปร  $S, E, I, R$  เป็น  $\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}$  เพื่อช่วยให้วิเคราะห์ได้ง่ายขึ้น ดังนี้

เมื่อกำหนดให้  $\bar{S} = \frac{S}{N}$ ,  $\bar{E} = \frac{E}{N}$ ,  $\bar{I} = \frac{I}{N}$  และ  $\bar{R} = \frac{R}{N}$  สามารถจัดสมการ (3.1)-(3.4)

ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จากสมการที่ (3.1)} \quad \frac{dS}{dt} &= \Omega N - (1 - \Delta)\psi SI - \mu S \\ \text{จะได้} \quad \frac{d(\bar{S}N)}{dt} &= \Omega N - (1 - \Delta)\psi(\bar{S}N)(\bar{I}N) - \mu(\bar{S}N) \\ \frac{Nd\bar{S}}{dt} &= \Omega N - (1 - \Delta)\psi(\bar{S}N)(\bar{I}N) - \mu(\bar{S}N) \\ \text{ดังนั้น} \quad \frac{d\bar{S}}{dt} &= \Omega N - (1 - \Delta)\psi N \bar{S} \bar{I} - \mu \bar{S} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการที่ (3.2)} \quad \frac{dE}{dt} &= (1 - \Delta)\psi SI - vE - \mu E \\ \text{จะได้} \quad \frac{d(\bar{E}N)}{dt} &= (1 - \Delta)\psi(\bar{S}N)(\bar{I}N) - v(\bar{E}N) - \mu(\bar{E}N) \\ \frac{Nd(\bar{E})}{dt} &= (1 - \Delta)\psi(\bar{S}N)(\bar{I}N) - v(\bar{E}N) - \mu(\bar{E}N) \\ \frac{d\bar{E}}{dt} &= (1 - \Delta)\psi N \bar{S} \bar{I} - v\bar{E} - \mu\bar{E} \\ \text{ดังนั้น} \quad \frac{d\bar{E}}{dt} &= (1 - \Delta)\psi N \bar{S} \bar{I} - \bar{E}(v + \mu) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการที่ (3.3)} \quad \frac{dI}{dt} &= vE - \phi I - \beta I - \mu I \\ \text{จะได้} \quad \frac{d(\bar{I}N)}{dt} &= v(\bar{E}N) - \phi(\bar{I}N) - \beta(\bar{I}N) - \mu(\bar{I}N) \\ \frac{Nd(\bar{I})}{dt} &= v(\bar{E}N) - \phi(\bar{I}N) - \beta(\bar{I}N) - \mu(\bar{I}N) \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = v\bar{E} - \phi\bar{I} - \beta\bar{I} - \mu\bar{I}$$

ดังนั้น  $\frac{d\bar{I}}{dt} = v\bar{E} - \bar{I}(\phi + \beta + \mu)$  (4.3)

และ  $\bar{R}$  สามารถหาได้จากเงื่อนไข  $\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{R} = 1$  ได้ดังนี้

จาก  $S + E + I + R = N$

$$\frac{S}{N} + \frac{E}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = \frac{N}{N}$$

$$\frac{S}{N} + \frac{E}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = 1$$

$$\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{R} = 1 \quad \therefore \bar{S} = \frac{S}{N}, \bar{E} = \frac{E}{N}, \bar{I} = \frac{I}{N} \text{ และ } \bar{R} = \frac{R}{N}$$

$$\bar{R} = 1 - \bar{S} - \bar{E} - \bar{I}$$

$$\bar{R} = 1 - (\bar{S} + \bar{E} + \bar{I})$$
 (4.4)

ซึ่งจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (Kermack and McKendrick, 1927) ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \Omega N - (1 - \Delta)\psi SI - \mu S$$
 (4.5)

$$\frac{dE}{dt} = (1 - \Delta)\psi SI - vE - \mu E$$
 (4.6)

$$\frac{dI}{dt} = vE - \phi I - \beta I - \mu I$$
 (4.7)

$$\frac{dR}{dt} = \phi I - \mu R$$
 (4.8)

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \Omega - [(1 - \Delta)\psi N\bar{S}\bar{I} + \mu\bar{S}]$$
 (4.9)

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = (1 - \Delta)\psi N\bar{S}\bar{I} - \bar{E}(v + \mu)$$
 (4.10)

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = v\bar{E} - \bar{I}(\phi + \beta + \mu)$$
 (4.11)

$$\bar{R} = 1 - (\bar{S} + \bar{E} + \bar{I})$$
 (4.12)

โดยค่าของตัวแปรทั้งสี่ข้างต้นจะต้องเป็นบวกเนื่องจากเป็นจำนวนประชากร จะได้  
 $S(t) > 0$ ,  $E(t) > 0$ ,  $I(t) > 0$  และ  $R(t) > 0$  เนื่องจากจำนวนประชากรรวมมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับ  
 เวลา คือ  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$  ซึ่งเป็นค่าคงที่

### การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวต่อไปนี้เป็น การวิเคราะห์เชิงคุณภาพ โดยศึกษา  
 จุดสมดุล ศึกษาค่าระดับการติดเชื้อ และศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล

การหาขอบเขตของค่าคงที่ (Invariant Region) เป็นการหาขอบเขตของค่าคงที่และช่วง  
 คำตอบของตัวแปร สามารถดำเนินการโดยนำสมการที่ (3.1)+(3.2)+(3.3)+(3.4) จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad & N = S + E + I + R \\
 \text{จะได้} \quad & \frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \\
 \text{ดังนั้น} \quad & \frac{dN}{dt} = \Omega N - (1 - \Delta)\psi SI - \mu S + (1 - \Delta)\psi SI - \nu E - \mu E \\
 & \quad + \nu E - \phi I - \beta I - \mu I + \phi I - \mu R \\
 & \frac{dN}{dt} = \Omega N - \mu S - \mu E - \beta I - \mu I - \mu R \\
 & \frac{dN}{dt} = \Omega N - \beta I - \mu(S + E + I + R) \\
 & \frac{dN}{dt} = \Omega N - \beta I - \mu N \quad \because N = S + E + I + R \\
 & \frac{dN}{dt} = (\Omega - \mu)N - \beta I \\
 \text{ดังนั้น} \quad & \frac{dN}{dt} \leq (\Omega - \mu)N - \beta I \\
 & dN \leq [(\Omega - \mu)N - \beta I]dt \\
 & dN \leq (\Omega - \mu)Ndt - \beta Idt \\
 & \frac{dN}{(\Omega - \mu)N} \leq \frac{(\Omega - \mu)Ndt - \beta Idt}{(\Omega - \mu)N} \\
 & \frac{dN}{(\Omega - \mu)N} \leq \frac{(\Omega - \mu)Ndt}{(\Omega - \mu)N} - \frac{\beta Idt}{(\Omega - \mu)N}
 \end{aligned}$$



$$\frac{1}{(\Omega - \mu)N} dN \leq dt - \frac{\beta I}{(\Omega - \mu)N} dt$$

$$\int \frac{1}{(\Omega - \mu)N} dN \leq \int dt - \int \frac{\beta I}{(\Omega - \mu)N} dt$$

$$\frac{1}{(\Omega - \mu)} \int \frac{1}{N} dN \leq \int dt - \frac{\beta I}{(\Omega - \mu)N} \int dt$$

$$\frac{1}{(\Omega - \mu)} \ln N \leq t - \frac{\beta I}{(\Omega - \mu)N} t + c_1$$

$$\ln N \leq (\Omega - \mu)t - (\Omega - \mu) \frac{\beta I}{(\Omega - \mu)N} t + (\Omega - \mu)c_1$$

$$\ln N \leq (\Omega - \mu)t - \frac{\beta I}{N} t + c_2$$

$$\ln N \leq \left[ (\Omega - \mu) - \frac{\beta I}{N} \right] t + c_2$$

$$N \leq e^{[(\Omega - \mu) - \frac{\beta I}{N}]t + c_2}$$

$$N \leq e^{c_2} e^{[(\Omega - \mu) - \frac{\beta I}{N}]t}$$

(4.13)

เนื่องจาก

$$N(0) = N_0 \quad \because t = 0$$

$$N_0 = e^{c_2} e^{[(\Omega - \mu) - \frac{\beta I}{N}]t(0)}$$

$$N_0 = e^{c_2} e^0$$

$$N_0 = e^{c_2}$$

(4.14)

นำค่าคงที่ที่ได้จากสมการ (4.14) แทนในสมการ (4.13)

จะได้

$$N(t) \leq N_0 e^{[(\Omega - \mu) - \frac{\beta I}{N}]t}$$

(4.15)

เมื่อ  $t \rightarrow \infty, N \rightarrow (\Omega - \mu - \frac{\beta I}{N})$  ดังนั้น  $0 \leq N \leq (\Omega - \mu - \frac{\beta I}{N})$ ถ้า  $N_0 < (\Omega - \mu - \frac{\beta I}{N})$  เมื่อ  $t \rightarrow \infty$  ส่งผลให้  $N$  มีค่าเข้าใกล้  $(\Omega - \mu - \frac{\beta I}{N})$ และถ้า  $N_0 > (\Omega - \mu - \frac{\beta I}{N})$  เมื่อ  $t \rightarrow \infty$  ส่งผลให้  $N$  มีค่าเป็น  $(\Omega - \mu - \frac{\beta I}{N})$ จึงทำให้  $N = (\Omega - \mu - \frac{\beta I}{N})$  เมื่อ  $t \rightarrow \infty$ ดังนั้น ขอบเขตของ  $N$  คือ  $0 < N < [\Omega - \mu - \beta(\frac{I}{N})]$ 

$$\text{จากสมการที่ (3.1)} \quad \frac{dS}{dt} = \Omega N - (1 - \Delta)\psi SI - \mu S$$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &\geq -(1-\Delta)\psi SI - \mu S \\ \frac{dS}{dt} &\geq -S[(1-\Delta)\psi I + \mu] \\ \frac{dS}{S} &\geq -[(1-\Delta)\psi I + \mu]dt \\ \int \frac{dS}{S} &\geq \int -[(1-\Delta)\psi I + \mu]dt \\ \ln S &\geq -[(1-\Delta)\psi I + \mu]t + c \\ S &\geq e^{-[(1-\Delta)\psi I + \mu]t + c} \\ S &\geq e^c e^{-[(1-\Delta)\psi I + \mu]t} \\ S &\geq S_0 e^{-[(1-\Delta)\psi I + \mu]t} \quad \because S_0 = e^c \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$S(t) \geq S_0 e^{-[(1-\Delta)\psi I + \mu]t} > 0 \quad (4.16)$$

จากสมการที่ (3.2)

$$\frac{dE}{dt} = (1-\Delta)\psi SI - \nu E - \mu E$$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &\geq -\nu E - \mu E \\ \frac{dE}{dt} &\geq -E(\nu + \mu) \\ \frac{dE}{E} &\geq -(\nu + \mu)dt \\ \int \frac{dE}{E} &\geq \int -(\nu + \mu)dt \\ \ln E &\geq -(\nu + \mu)t + c \\ E &\geq e^{-(\nu + \mu)t + c} \\ E &\geq e^c e^{-(\nu + \mu)t} \\ E &\geq E_0 e^{-(\nu + \mu)t} \quad \because E_0 = e^c \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$E(t) \geq E_0 e^{-(\nu + \mu)t} > 0 \quad (4.17)$$

จากสมการที่ (3.3)

$$\frac{dI}{dt} = \nu E - \phi I - \beta I - \mu I$$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &\geq -\phi I - \beta I - \mu I \\ \frac{dI}{dt} &\geq -I(\phi + \beta + \mu) \\ \frac{dI}{I} &\geq -(\phi + \beta + \mu)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dI}{I} \geq \int -(\phi + \beta + \mu) dt \\
& \ln I \geq -(\phi + \beta + \mu)t + c \\
& I \geq e^{-(\phi + \beta + \mu)t + c} \\
& I \geq e^c e^{-(\phi + \beta + \mu)t} \\
& I \geq I_0 e^{-(\phi + \beta + \mu)t} \quad \because I_0 = e^c \\
\text{ดังนั้น} & \quad I(t) \geq I_0 e^{-(\phi + \beta + \mu)t} > 0 \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{จากสมการที่ (3.4)} \quad \frac{dR}{dt} = \phi I - \mu R \\
& \text{จะได้} \quad \frac{dR}{dt} \geq -\mu R \\
& \quad \frac{dR}{R} \geq -\mu dt \\
& \int \frac{dR}{R} \geq \int -\mu dt \\
& \ln R \geq -\mu t + c \\
& R \geq e^{-\mu t + c} \\
& R \geq e^c e^{-\mu t} \\
& R \geq R_0 e^{-\mu t} \quad \because R_0 = e^c \\
\text{ดังนั้น} & \quad R(t) \geq R_0 e^{-\mu t} > 0 \tag{4.19}
\end{aligned}$$

จากสมการ (4.16), (4.17), (4.18) และ (4.19) จะได้  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  และ  $R(t)$  มีขอบเขตของค่าคงที่ (Invariant Region) อยู่ในช่วงจำนวนจริงบวก

ดังนั้น เซตคำตอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ( $\Sigma$ ) มีขอบเขตเป็น

$$\Sigma = \left\{ (S, E, I, R) \in \mathbb{R}^+ \mid N < \left[ \Omega - \mu - \beta \left( \frac{I}{N} \right) \right] \right\}$$

**การหาจุดสมดุล (Equilibrium point)** เป็นการหาจุดสมดุลโดยจัดสมการอนุพันธ์แบบไม่

เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์  $\frac{d\bar{S}}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\bar{E}}{dt} = 0$  และ  $\frac{d\bar{I}}{dt} = 0$

ได้ดังนี้

$$0 = \Omega - [(1 - \Delta)\psi N \bar{S} \bar{I} + \mu \bar{S}] \tag{4.20}$$

$$0 = (1 - \Delta)\psi N \bar{S} \bar{I} - \bar{E}(v + \mu) \tag{4.21}$$

$$0 = v \bar{E} - \bar{I}(\phi + \beta + \mu) \tag{4.22}$$

จากสมการ (4.20) - (4.22) ดำเนินการจัดรูปสมการใหม่เพื่อหาค่าของ  $\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{R}$  โดยดำเนินการดังนี้

1) จากสมการ (4.20) พิจารณา  $\frac{d\bar{S}}{dt} = 0$

$$\text{จาก } 0 = \Omega - [(1 - \Delta)\psi N\bar{S}\bar{I} + \mu\bar{S}]$$

$$[(1 - \Delta)\psi N\bar{S}\bar{I} + \mu\bar{S}] = \Omega$$

$$\bar{S}[(1 - \Delta)\psi N\bar{I} + \mu] = \Omega$$

$$\bar{S} = \frac{\Omega}{(1 - \Delta)\psi N\bar{I} + \mu}$$

$$\text{ดังนั้น } \bar{S}^* = \frac{\Omega}{(1 - \Delta)\psi N\bar{I} + \mu} \quad (4.23)$$

2) จากสมการ (4.22) พิจารณา  $\frac{d\bar{I}}{dt} = 0$  จะได้

$$\text{จาก } 0 = v\bar{E} - \bar{I}(\phi + \beta + \mu)$$

$$\bar{I}(\phi + \beta + \mu) = v\bar{E}$$

$$\bar{I} = \frac{v\bar{E}}{\phi + \beta + \mu}$$

$$\text{ดังนั้น } \bar{I}^* = \frac{v\bar{E}}{\phi + \beta + \mu} \quad (4.24)$$

3) จากสมการ (4.21) พิจารณา  $\frac{d\bar{E}}{dt} = 0$  จะได้

$$\text{จาก } 0 = (1 - \Delta)\psi N\bar{S}\bar{I} - \bar{E}(v + \mu)$$

$$\bar{E}(v + \mu) = (1 - \Delta)\psi N\bar{S}\bar{I}$$

$$\bar{E} = \frac{(1 - \Delta)\psi N\bar{S}\bar{I}}{v + \mu}$$

$$\bar{E} = \frac{(1 - \Delta)\psi N\bar{I}}{v + \mu} \cdot \frac{\Omega}{(1 - \Delta)\psi N\bar{I} + \mu} \quad \therefore \bar{S} = \frac{\Omega}{(1 - \Delta)\psi N\bar{I} + \mu}$$

$$\bar{E} = \frac{(1 - \Delta)\psi N\Omega\bar{I}}{(v + \mu)(1 - \Delta)\psi N\bar{I} + \mu}$$

$$\bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega\left(\frac{v\bar{E}}{\phi+\beta+\mu}\right)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N\left(\frac{v\bar{E}}{\phi+\beta+\mu}\right)+\mu} \quad \therefore \bar{I} = \frac{v\bar{E}}{\phi+\beta+\mu}$$

$$\bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega v\bar{E}}{\phi+\beta+\mu} \cdot \frac{\phi+\beta+\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv\bar{E} + \mu}$$

$$\bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega v\bar{E}}{\phi+\beta+\mu} \cdot \frac{\phi+\beta+\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv\bar{E} + \mu(\phi+\beta+\mu)}$$

$$\bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega v\bar{E}}{\phi+\beta+\mu} \cdot \frac{\phi+\beta+\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv\bar{E} + \mu(\phi+\beta+\mu)}$$

$$\bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega v\bar{E}}{\phi+\beta+\mu} \cdot \frac{\phi+\beta+\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv\bar{E} + \mu(\phi+\beta+\mu)}$$

$$\bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega v\bar{E}}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv\bar{E} + \mu(\phi+\beta+\mu)}$$

$$1 = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega v}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv\bar{E} + \mu(\phi+\beta+\mu)}$$

$$(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv\bar{E} + \mu(\phi+\beta+\mu) = (1-\Delta)\psi N\Omega v$$

$$(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv\bar{E} = (1-\Delta)\psi N\Omega v - \mu(\phi+\beta+\mu)$$

$$\bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega v - \mu(\phi+\beta+\mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv}$$

$$\bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N\Omega v}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv} - \frac{\mu(\phi+\beta+\mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv}$$

$$\bar{E} = \frac{\Omega}{(v+\mu)} - \frac{\mu(\phi+\beta+\mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv}$$

$$\text{ดังนั้น } \bar{E}^* = \frac{\Omega}{(v+\mu)} - \frac{\mu(\phi+\beta+\mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv} \quad (4.25)$$

4) จากสมการ (4.17) พิจารณา  $\bar{I} = \frac{v\bar{E}}{\phi+\beta+\mu}$  เพื่อต้องการจัดรูปให้เป็น  $\bar{I}^*$

$$\text{แทนค่า } \bar{E} = \frac{\Omega}{(v+\mu)} - \frac{\mu(\phi+\beta+\mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv} \text{ ลงในสมการที่ (13)}$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \bar{I}^* &= \frac{v}{\phi + \beta + \mu} \cdot \left[ \frac{\Omega}{(v + \mu)} - \frac{\mu(\phi + \beta + \mu)}{(v + \mu)(1 - \Delta)\psi Nv} \right] \\
\bar{I}^* &= \frac{v\Omega}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} - \frac{\mu}{(v + \mu)(1 - \Delta)\psi N} \\
\text{ดังนั้น } \bar{I}^* &= \frac{v\Omega}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} - \frac{\mu}{(v + \mu)(1 - \Delta)\psi N} \quad (4.26)
\end{aligned}$$

จากสมการ (4.23) - (4.26) จะได้เซตของตัวแปร  $\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{R}$  เพื่อช่วยในการหาการหาจุดสมดุล (Equilibrium point) คือ

$$E_x(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*) = \left( \frac{\Omega}{(1 - \Delta)\psi N\bar{I} + \mu}, \frac{\Omega}{(v + \mu)} - \frac{\mu(\phi + \beta + \mu)}{(v + \mu)(1 - \Delta)\psi Nv}, \frac{v\Omega}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} - \frac{\mu}{(v + \mu)(1 - \Delta)\psi N} \right)$$

**การหาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point:  $E_0$ )**

จากสมการ (4.23) และ (4.24) จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point:  $E_0$ ) ในกรณีที่ไม่มีโรคติดเชื้อ โดยกำหนดให้  $\bar{I} = 0$  โดยดำเนินการดังนี้

1) กำหนดให้  $\bar{I} = 0$  แทนในสมการ (4.23)

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \bar{S} &= \frac{\Omega}{(1 - \Delta)\psi N\bar{I} + \mu} \\
\bar{S} &= \frac{\Omega}{(1 - \Delta)\psi N(0) + \mu} \\
\bar{S} &= \frac{\Omega}{\mu} \\
\frac{S}{N} &= \frac{\Omega}{\mu} \\
S &= \frac{\Omega N}{\mu} \quad \text{เมื่อ } \Omega = \mu \\
S &= N
\end{aligned}$$

2) กำหนดให้  $\bar{I} = 0$  แทนในสมการ (4.24)

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \bar{I} &= \frac{v\bar{E}}{\phi + \beta + \mu} \\
0 &= \frac{v\bar{E}}{\phi + \beta + \mu} \\
0 &= v\bar{E}
\end{aligned}$$

$$\frac{0}{v} = \bar{E}$$

$$0 = \bar{E}$$

ดังนั้น จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point:  $E_0$ ) ในกรณีที่ไม่มี  
การติดเชื้อโรค ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค คือ  $E_0(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = E_0\left(\frac{\Omega}{\mu}, 0, 0\right)$

**การหาจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium Point:  $E_1$ )**

จากสมการ (4.23) - (4.26) จะได้ค่า ในกรณีที่มีการระบาดของเชื้อโรค โดย  
กำหนดให้  $I \neq 0$  และ  $I > 0$

เนื่องจาก

$$I > 0$$

$$\frac{I}{N} > \frac{0}{N}$$

$$\bar{I} > 0$$

$$\therefore \bar{I} = \frac{I}{N}$$

$$\frac{v\bar{E}}{\phi + \beta + \mu} > 0$$

$$\therefore \bar{I} = \frac{v\bar{E}}{\phi + \beta + \mu}$$

$$\left[ \frac{v\Omega}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} - \frac{\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N} \right] > 0$$

$$\therefore \bar{I}^* = \bar{I}$$

ดังนั้น  $\bar{I}^* > 0$  และ  $\left[ \frac{v\Omega}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} - \frac{\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N} \right] > 0$

ดำเนินการหาจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium  
Point:  $E_1$ )  $E_1(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*)$  โดยกำหนด  $\bar{I}^* > 0$  สามารถดำเนินการได้ดังนี้

$$1) \text{ จากสมการ } \bar{S} = \frac{\Omega}{(1-\Delta)\psi N \bar{I} + \mu} \quad \text{กำหนดให้ } \bar{I}^* > 0$$

$$\text{จะได้ } \bar{S}^* = \frac{\Omega}{(1-\Delta)\psi N \bar{I}^* + \mu} \quad (4.27)$$

$$2) \text{ จากสมการ } \bar{E} = \frac{(1-\Delta)\psi N \bar{S} \bar{I}}{v + \mu} \quad \text{กำหนดให้ } \bar{I}^* > 0$$

$$\text{จะได้ } \bar{E}^* = \frac{\Omega}{(v+\mu)} - \frac{\mu(\phi+\beta+\mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N v} \quad (4.28)$$

3) จากสมการ  $\bar{I} = \frac{v\bar{E}}{\phi + \beta + \mu}$  กำหนดให้  $\bar{I}^* > 0$

$$\text{จะได้ } \bar{I}^* = \left[ \frac{v\Omega}{(v+\mu)(\phi + \beta + \mu)} - \frac{\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N} \right] \quad (4.29)$$

ดังนั้น จะได้ความสัมพันธ์ ณ จุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค คือ

$$E_1(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*) = \left( \frac{\Omega}{(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu}, \frac{\Omega}{(v+\mu)}, \frac{\mu(\phi + \beta + \mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv}, \frac{v\Omega}{(v+\mu)(\phi + \beta + \mu)} - \frac{\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N} \right)$$

### การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: $R_0$ )

การหาค่าระดับการติดเชื้อได้จากการหาค่ารัศมีที่โดดเด่นของการแพร่ระบาดของโรค (Spectral radius หรือ Largest Eigen Value) โดยเริ่มจากระบบสมการ (3.1), (3.2), (3.3) และ

(3.4) จะได้เมตริกซ์ ในรูป  $\frac{\partial X}{\partial t} = F(X) - V(X)$  เพื่อหาค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) จากเมตริกซ์

$FV^{-1}$  ซึ่ง  $F(X)$  และ  $V(X)$  ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F = \left[ \frac{\partial(F(X_i))}{\partial X_i} \right] \text{ และ } V = \left[ \frac{\partial(V(X_i))}{\partial X_i} \right]$$

โดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อดังนี้ ( $R_0$ ) ดังนี้

1.  $R_0 > 1$  แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2.  $R_0 = 1$  แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3.  $R_0 < 1$  แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

จากสมการ (3.1), (3.2), (3.3) และ (3.4) จะได้เมตริกซ์ ในรูป  $\frac{\partial X}{\partial t} = F(X) - V(X)$  โดย

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\Delta)\psi SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V(X) = \begin{bmatrix} -\Omega N + (1-\Delta)\psi SI + \mu S \\ vE + \mu E \\ -vE + \phi I + \beta I + \mu I \\ -\phi I + \mu R \end{bmatrix}$$



$$\therefore \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\Delta)\psi SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega N + (1-\Delta)\psi SI + \mu S \\ vE + \mu E \\ -vE + \phi I + \beta I + \mu I \\ -\phi I + \mu R \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \Omega N - (1-\Delta)\psi SI - \mu S \\ (1-\Delta)\psi SI - (vE + \mu E) \\ vE - \phi I - \beta I - \mu I \\ \phi I - \mu R \end{bmatrix}$$

กำหนดให้  $F = \left[ \frac{\partial(F(X_i))}{\partial X_i} \right]$  และ  $V = \left[ \frac{\partial(V(X_i))}{\partial X_i} \right]$

จะได้  $F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial[0]}{\partial S} & \frac{\partial[0]}{\partial E} & \frac{\partial[0]}{\partial I} & \frac{\partial[0]}{\partial R} \\ \frac{\partial[(1-\Delta)\psi SI]}{\partial S} & \frac{\partial[(1-\Delta)\psi SI]}{\partial E} & \frac{\partial[(1-\Delta)\psi SI]}{\partial I} & \frac{\partial[(1-\Delta)\psi SI]}{\partial R} \\ \frac{\partial[0]}{\partial S} & \frac{\partial[0]}{\partial E} & \frac{\partial[0]}{\partial I} & \frac{\partial[0]}{\partial R} \\ \frac{\partial[0]}{\partial S} & \frac{\partial[0]}{\partial E} & \frac{\partial[0]}{\partial I} & \frac{\partial[0]}{\partial R} \end{bmatrix}$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-\Delta)\psi I & 0 & (1-\Delta)\psi S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

และ

$$V(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial[-\Omega N + (1-\Delta)\psi SI + \mu S]}{\partial S} & \frac{\partial[-\Omega N + (1-\Delta)\psi SI + \mu S]}{\partial E} & \frac{\partial[-\Omega N + (1-\Delta)\psi SI + \mu S]}{\partial I} & \frac{\partial[-\Omega N + (1-\Delta)\psi SI + \mu S]}{\partial R} \\ \frac{\partial S}{\partial[vE + \mu E]} & \frac{\partial E}{\partial[vE + \mu E]} & \frac{\partial I}{\partial[vE + \mu E]} & \frac{\partial R}{\partial[vE + \mu E]} \\ \frac{\partial S}{\partial[-vE + \phi I + \beta I + \mu I]} & \frac{\partial E}{\partial[-vE + \phi I + \beta I + \mu I]} & \frac{\partial I}{\partial[-vE + \phi I + \beta I + \mu I]} & \frac{\partial R}{\partial[-vE + \phi I + \beta I + \mu I]} \\ \frac{\partial S}{\partial[-\phi I + \mu R]} & \frac{\partial E}{\partial[-\phi I + \mu R]} & \frac{\partial I}{\partial[-\phi I + \mu R]} & \frac{\partial R}{\partial[-\phi I + \mu R]} \\ \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial E} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial R}{\partial R} \end{bmatrix}$$

$$V(x) = \begin{bmatrix} (1-\Delta)\psi I + \mu & 0 & (1-\Delta)\psi S & 0 \\ 0 & v + \mu & 0 & 0 \\ 0 & -v & \phi + \beta + \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\phi & \mu \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

ดังนั้น ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคนั้นจะได้  $E_0(S, E, I, R) = E_0(N, 0, 0, 0)$

$$\text{จะได้ } F(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\Delta)\psi N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$V(E_0) = \begin{bmatrix} \mu & 0 & (1-\Delta)\psi N & 0 \\ 0 & v + \mu & 0 & 0 \\ 0 & -v & \phi + \beta + \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\phi & \mu \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

การหาค่ารัศมีที่โดดเด่นของการแพร่ระบาดของโรค จากเมตริกซ์  $FV^{-1}(E_0)$  โดยดำเนินการดังนี้

$$1. \text{ การหาเมตริกซ์อินเวอร์ส } V^{-1}(E_0) = \frac{\text{adj}(V_0)}{\det(V_0)}$$

1.1 คำนวณหา  $\det[V(E_0)]$  จากสมการที่ 4.26 จะได้

$$\begin{aligned}
\det[V(E_0)] &= \begin{vmatrix} \mu & 0 & (1-\Delta)\psi N & 0 \\ 0 & v+\mu & 0 & 0 \\ 0 & -v & \phi+\beta+\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\phi & \mu \end{vmatrix} \\
&= \mu(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} v+\mu & 0 & 0 \\ -v & \phi+\beta+\mu & 0 \\ 0 & -\phi & \mu \end{vmatrix} \\
&= \mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)\mu \\
&= \mu^2(v+\mu)(\phi+\beta+\mu) \\
\text{ดังนั้น} \quad \det[V(E_0)] &= \mu^2(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)
\end{aligned}$$

### 1.2 คำนวณหา $\text{adj}[V(E_0)]$

$$M[V(E_0)] = \begin{bmatrix} (v+\mu)(\phi+\beta+\mu)\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu v(1-\Delta)\psi N & (\phi+\beta+\mu)\mu^2 & -\mu^2 v & \mu v \phi \\ -(v+\mu)(1-\Delta)\psi N \mu & 0 & (v+\mu)\mu^2 & -\mu(v+\mu)\phi \\ 0 & 0 & 0 & -\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix}$$

$$C[V(E_0)] = \begin{bmatrix} (v+\mu)(\phi+\beta+\mu)\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu v(1-\Delta)\psi N & (\phi+\beta+\mu)\mu^2 & \mu^2 v & \mu v \phi \\ -(v+\mu)(1-\Delta)\psi N \mu & 0 & (v+\mu)\mu^2 & \mu(v+\mu)\phi \\ 0 & 0 & 0 & -\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}[V(E_0)] = \begin{bmatrix} (v+\mu)(\phi+\beta+\mu)\mu & -\mu v(1-\Delta)\psi N & -(v+\mu)(1-\Delta)\psi N \mu & 0 \\ 0 & (\phi+\beta+\mu)\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 v & (v+\mu)\mu^2 & 0 \\ 0 & \mu v \phi & \mu(v+\mu)\phi & -\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix}$$

$$V^{-1}(E_0) = \frac{1}{\mu^2(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} \begin{bmatrix} (v+\mu)(\phi+\beta+\mu)\mu & -\mu v(1-\Delta)\psi N & -(v+\mu)(1-\Delta)\psi N \mu & 0 \\ 0 & (\phi+\beta+\mu)\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 v & (v+\mu)\mu^2 & 0 \\ 0 & \mu v \phi & \mu(v+\mu)\phi & -\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix}$$

$$V^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & \frac{-v(1-\Delta)\psi N}{\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & \frac{-(v+\mu)(1-\Delta)\psi N}{\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & \frac{1}{\phi+\beta+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{v\phi}{\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & \frac{\phi}{\mu(\phi+\beta+\mu)} & -\frac{1}{\mu} \end{bmatrix}$$

2. การหาเมตริกซ์  $FV^{-1}(E_0)$

$$FV^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\Delta)\psi N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & \frac{-v(1-\Delta)\psi N}{\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & \frac{-(v+\mu)(1-\Delta)\psi N}{\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & \frac{1}{\phi+\beta+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{v\phi}{\mu(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & \frac{\phi}{\mu(\phi+\beta+\mu)} & -\frac{1}{\mu} \end{bmatrix}$$

$$FV^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\Delta)\psi v N}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} & \frac{(1-\Delta)\psi N}{\phi+\beta+\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. การหา  $\det[FV^{-1}(E_0) - \lambda I]$

$$FV^{-1}(E_0) - \lambda I = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\Delta)\psi v N}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} - \lambda & \frac{(1-\Delta)\psi N}{\phi+\beta+\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[\mathbf{FV}^{-1}(\mathbf{E}_0) - \lambda \mathbf{I}] = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1 - \Delta)\psi v N}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} - \lambda & \frac{(1 - \Delta)\psi N}{\phi + \beta + \mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det[\mathbf{FV}^{-1}(\mathbf{E}_0) - \lambda \mathbf{I}] = (-\lambda) \left( \frac{(1 - \Delta)\psi v N}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} - \lambda \right) (-\lambda)(-\lambda)$$

#### 4. การหา $\rho(\mathbf{FV}^{-1}(\mathbf{E}_0))$

กำหนดให้  $\det[\mathbf{FV}^{-1}(\mathbf{E}_0) - \lambda \mathbf{I}] = 0$

จะได้  $0 = (-\lambda) \left( \frac{(1 - \Delta)\psi v N}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} - \lambda \right) (-\lambda)(-\lambda)$

$$0 = (\lambda)(\lambda)(\lambda) \left( \frac{(1 - \Delta)\psi v N}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} - \lambda \right)$$

ดังนั้น  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  และ  $\lambda_4 = \frac{(1 - \Delta)\psi v N}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)}$

จากบทนิยาม Spectral radius ( $R_0$ ) จากเมตริกซ์  $\mathbf{FV}^{-1}(\mathbf{E}_0)$  คือ

$$\rho(\mathbf{FV}^{-1}(\mathbf{E}_0)) = \max \left\{ 0, 0, 0, \frac{(1 - \Delta)\psi v N}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} \right\}$$

ดังนั้น  $\rho(\mathbf{FV}^{-1}(\mathbf{E}_0)) = \frac{(1 - \Delta)\psi v N}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)}$

จะได้ค่าระดับการติดเชื้อ คือ  $R_0 = \frac{(1 - \Delta)\psi v N}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)}$  (4.34)

### การวิเคราะห์เสถียรภาพ (stability Analysis)

การวิเคราะห์เสถียรภาพเป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี ได้แก่

1) Local Asymptotically Stable ณ จุด  $E_0$

2) Local Asymptotically Stable ณ จุด  $E_1$

โดยดำเนินการดังนี้

$$\text{กำหนดให้ } F_1(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \Omega - [(1-\Delta)\psi N\bar{S}\bar{I} + \mu\bar{S}] \quad (4.35)$$

$$F_2(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = (1-\Delta)\psi N\bar{S}\bar{I} - \bar{E}(v+\mu) \quad (4.36)$$

$$F_3(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = v\bar{E} - \bar{I}(\phi + \beta + \mu) \quad (4.37)$$

จากสมการ (4.35), (4.36) และ(4.37) ตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะโดยการสร้างจาโคเบียนเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{d\bar{S}} & \frac{df_1}{d\bar{E}} & \frac{df_1}{d\bar{I}} \\ \frac{df_2}{d\bar{S}} & \frac{df_2}{d\bar{E}} & \frac{df_2}{d\bar{I}} \\ \frac{df_3}{d\bar{S}} & \frac{df_3}{d\bar{E}} & \frac{df_3}{d\bar{I}} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } J = \begin{bmatrix} -(1-\Delta)\psi N\bar{I} - \mu & 0 & -(1-\Delta)\psi N\bar{S} \\ -(1-\Delta)\psi N\bar{I} & -(v+\mu) & (1-\Delta)\psi N\bar{S} \\ 0 & v & -(\phi + \beta + \mu) \end{bmatrix}$$

#### Local Asymptotically Stable ณ จุด $E_0$ ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค

Local Asymptotically Stable ณ จุด  $E_0$  ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคโดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค ( $E_0$ ) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก  $\det(J_0 - \lambda I) = 0$ ,  $J_0$  คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด  $E_0$  และ  $I$  คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์

1.1) การสร้างเมตริกซ์  $J_0$

$$\text{จากจาโคเบียนเมตริกซ์ } J = \begin{bmatrix} -(1-\Delta)\psi N\bar{I} - \mu & 0 & -(1-\Delta)\psi N\bar{S} \\ -(1-\Delta)\psi N\bar{I} & -(v+\mu) & (1-\Delta)\psi N\bar{S} \\ 0 & v & -(\phi + \beta + \mu) \end{bmatrix}$$

จาก  $E_0 : (\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \left(\frac{S}{N}, \frac{E}{N}, \frac{I}{N}\right)$  โดยที่  $(S, E, I) = (N, 0, 0)$

ดังนั้น  $E_0 : (\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \left(\frac{N}{N}, \frac{0}{N}, \frac{0}{N}\right) = (1, 0, 0)$

จะได้  $J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -(1-\Delta)\psi N \\ 0 & -(v+\mu) & (1-\Delta)\psi N \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix}$

1.2) การหาเมตริกซ์  $J_0 - \lambda I$  โดยกำหนดให้  $\lambda$  คือค่าลักษณะเฉพาะ ดังนี้

$$J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -(1-\Delta)\psi N \\ 0 & -(v+\mu) & (1-\Delta)\psi N \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -(1-\Delta)\psi N \\ 0 & -(v+\mu) & (1-\Delta)\psi N \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -(1-\Delta)\psi N \\ 0 & -(v+\mu) - \lambda & (1-\Delta)\psi N \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) - \lambda \end{bmatrix}$$

1.3) การหา determinant ของเมตริกซ์  $J_0 - \lambda I$  ดังนี้

$$\det(J_0 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -(1-\Delta)\psi N \\ 0 & -(v+\mu) - \lambda & (1-\Delta)\psi N \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\mu - \lambda)(-(v+\mu) - \lambda)[-(\phi+\beta+\mu) - \lambda] - v(1-\Delta)\psi N(-\mu - \lambda)$$

$$= (-\mu - \lambda)[(v+\mu) + \lambda][(\phi+\beta+\mu) + \lambda] - (1-\Delta)v\psi N$$

$$= (-\mu - \lambda)[\lambda^2 + \lambda(\phi+\beta+\mu) + \lambda(v+\mu) + (v+\mu)(\phi+\beta+\mu) - (1-\Delta)v\psi N]$$

$$\det(J_0 - \lambda I) = (-\mu - \lambda)[\lambda^2 + \lambda(\phi+\beta+v+2\mu) + (v+\mu)(\phi+\beta+\mu) - (1-\Delta)v\psi N]$$

1.4) การหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) โดยกำหนดให้  $\det(J_0 - \lambda I) = 0$  ดังนี้

$$0 = (-\mu - \lambda) \left[ \lambda^2 + \lambda(\phi + \beta + v + 2\mu) + (v + \mu)(\phi + \beta + \mu) - (1 - \Delta)v\psi N \right]$$

จะได้  $0 = (\mu + \lambda)$  และ

$$0 = \left[ \lambda^2 + \lambda(\phi + \beta + v + 2\mu) + (v + \mu)(\phi + \beta + \mu) - (1 - \Delta)v\psi N \right]$$

ดังนั้น  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_{2,3} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$  เมื่อ  $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$

โดย  $A = \phi + \beta + v + 2\mu$  และ  $B = (v + \mu)(\phi + \beta + \mu) - (1 - \Delta)v\psi N$

ซึ่ง  $\lambda_2$  และ  $\lambda_3$  จะมีค่าเป็นลบ เมื่อ  $A > \sqrt{A^2 - 4B}$  และ  $A > 0, B > 0$

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะ  $\lambda_1, \lambda_2$  และ  $\lambda_3$  ซึ่งทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุด  $E_0 = (N, 0, 0, 0)$  ดังนั้น จุดสมดุลที่ไม่มีโรค  $E_0$  จะเป็น Local Asymptotically

#### Local Asymptotically Stable ณ จุด $E_1$ ของจุดสมดุลที่มีโรค

Local Asymptotically Stable ณ จุด  $E_1$  ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค ( $E_1$ ) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก  $\det(J_1 - \lambda I) = 0$ ,  $J_1$  คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด  $E_1$  โดยมีข้อกำหนดว่า  $\lambda$  ทุกค่าส่วนจริงต้องเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า  $R_0 > 1$  ดังนี้

2.1) การสร้างเมตริกซ์  $J_1$

จากจาโคเบียนเมตริกซ์  $J = \begin{bmatrix} -(1 - \Delta)\psi N \bar{I} - \mu & 0 & -(1 - \Delta)\psi N \bar{S} \\ -(1 - \Delta)\psi N \bar{I} & -(v + \mu) & (1 - \Delta)\psi N \bar{S} \\ 0 & v & -(\phi + \beta + \mu) \end{bmatrix}$

กำหนดให้  $\bar{S}^* = \frac{\Omega}{(1 - \Delta)\psi N \bar{I}^* + \mu}$ ,  $\bar{E}^* = \frac{\Omega}{v + \mu} - \frac{\mu(\phi + \beta + \mu)}{(v + \mu)(1 - \Delta)\psi v N}$  และ

$$\bar{I}^* = \frac{v\Omega}{(v + \mu)(\phi + \beta + \mu)} - \frac{\mu}{(v + \mu)(1 - \Delta)\psi N}$$

จะได้  $J_1 = \begin{bmatrix} -(1 - \Delta)\psi N \bar{I}^* - \mu & 0 & -(1 - \Delta)\psi N \bar{S}^* \\ -(1 - \Delta)\psi N \bar{I}^* & -(v + \mu) & (1 - \Delta)\psi N \bar{S}^* \\ 0 & v & -(\phi + \beta + \mu) \end{bmatrix}$



2.2) การหาเมตริกซ์  $J_1 - \lambda I$  โดยกำหนดให้  $\lambda$  คือค่าลักษณะเฉพาะ ดังนี้

$$J_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* - \mu & 0 & -(1-\Delta)\psi N\bar{S}^* \\ -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* & -(v+\mu) & (1-\Delta)\psi N\bar{S}^* \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* - \mu & 0 & -(1-\Delta)\psi N\bar{S}^* \\ -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* & -(v+\mu) & (1-\Delta)\psi N\bar{S}^* \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* - \mu - \lambda & 0 & -(1-\Delta)\psi N\bar{S}^* \\ -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* & -(v+\mu) - \lambda & (1-\Delta)\psi N\bar{S}^* \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) - \lambda \end{bmatrix}$$

2.3) การหา determinant ของเมตริกซ์  $J_1 - \lambda I$  ดังนี้

$$\begin{aligned} \det(J_1 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* - \mu - \lambda & 0 & -(1-\Delta)\psi N\bar{S}^* \\ -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* & -(v+\mu) - \lambda & (1-\Delta)\psi N\bar{S}^* \\ 0 & v & -(\phi+\beta+\mu) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \left( -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* - \mu - \lambda \right) \left( -(v+\mu) - \lambda \right) \left( -(\phi+\beta+\mu) - \lambda \right) \\ &\quad + \left( -(1-\Delta)\psi N\bar{S}^* (1-\Delta)\psi v N\bar{I}^* \right) - \left[ (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \left( -(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* - \mu - \lambda \right) \right] \\ &= \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu + \lambda \right) \left( (v+\mu) + \lambda \right) \left( -(\phi+\beta+\mu) - \lambda \right) \\ &\quad - (1-\Delta)^2 \psi^2 v N^2 \bar{S}^* \bar{I}^* + (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu + \lambda \right) \\ &= \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu + \lambda \right) \left( (v+\mu) + \lambda \right) \left( (\phi+\beta+\mu) + \lambda \right) + \left( (1-\Delta)\psi N \right)^2 v \bar{S}^* \bar{I}^* \\ &\quad - (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* - (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu - \lambda (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \\ &= \left[ \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu \right) (v+\mu) + \lambda (v+\mu) + \lambda \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu \right) + \lambda^2 \right] \left( (\phi+\beta+\mu) + \lambda \right) \\ &\quad + \left( (1-\Delta)\psi N \right)^2 v \bar{S}^* \bar{I}^* - \left( (1-\Delta)\psi N \right)^2 v \bar{S}^* \bar{I}^* - (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu - \lambda (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \\ &= \left[ \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu \right) (v+\mu) + \lambda (v+\mu) + \lambda \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu \right) + \lambda^2 \right] \left( (\phi+\beta+\mu) + \lambda \right) \\ &\quad - (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu - \lambda (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \\ &= \left[ \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu \right) (v+\mu) + \lambda \left( (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + 2\mu \right) + \lambda^2 \right] \left( (\phi+\beta+\mu) + \lambda \right) \\ &\quad - (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu - \lambda (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v+\mu)(\phi+\beta+\mu) + \lambda((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v+2\mu)(\phi+\beta+\mu) \\
&+ \lambda^2(\phi+\beta+\mu) + \lambda((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v+\mu) + \lambda^2((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v+2\mu) + \lambda^3 \\
&- (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu - \lambda(1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \\
&= \lambda^3 + \lambda^2((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + \phi + \beta + 3\mu) \\
&+ \lambda \left[ ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + 2\mu)(\phi + \beta + \mu) + ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v + \mu) - ((1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu) \right] \\
&+ ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v + \mu)(\phi + \beta + \mu) - (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu
\end{aligned}$$

2.4) การหาค่าลักษณะเฉพาะ โดยกำหนดให้  $\det(J_1 - \lambda I) = 0$  ดังนี้

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda^3 + \lambda^2((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + \phi + \beta + 3\mu) \\
&+ \lambda \left[ ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + 2\mu)(\phi + \beta + \mu) + ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v + \mu) - ((1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu) \right] \\
&+ ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v + \mu)(\phi + \beta + \mu) - (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu
\end{aligned}$$

จัดในรูปของ  $\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$  เมื่อ

$$A = (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + \phi + \beta + 3\mu$$

$$B = ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + 2\mu)(\phi + \beta + \mu) + ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v + \mu) - ((1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu)$$

$$C = ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v + \mu)(\phi + \beta + \mu) - (1-\Delta)\psi v N\bar{S}^* \mu$$

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค  $\lambda$  เป็นค่าลักษณะเฉพาะ โดยหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะจากสมการ  $\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$  เนื่องจาก  $A > 0$  และ  $B > 0$  จะได้ว่า  $AB > C$  นั่นคือสมการ  $\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$  สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz และเมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุด

$$E_1(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*) = \left( \frac{\Omega}{(1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu}, \frac{\Omega}{(v+\mu)} - \frac{\mu(\phi+\beta+\mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi Nv}, \frac{v\Omega}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} - \frac{\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N} \right)$$

ดังนั้น จุดสมดุลมีโรค  $E_1$  จะเป็น Local Asymptotically

## บทที่ 5

### ตัวอย่างเชิงตัวเลข

การวิเคราะห์เชิงตัวเลข เป็นการพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม โดยการนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยจำลองแบบด้วยโปรแกรม Matlab การวิจัยในครั้งนี้

นี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจและจากเอกสารอ้างอิง เพื่อให้ได้แบบจำลองที่สมเหตุสมผล

### ค่าพารามิเตอร์

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย	อ้างอิง
จำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด	$N$	418,785	คน	สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต
อัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์	$\Omega$	$3.1448 \times 10^{-5}$	ต่อวัน	สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต
อัตราการตายโดยธรรมชาติ	$\mu$	$1.6937 \times 10^{-5}$	ต่อวัน	สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต
อัตราการสัมผัสเชื้อ	$\psi$	$4.776 \times 10^{-4}$	ต่อวัน	สัญลักษณ์ ชัยชนะ 2565 ,หน้า 401
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	$\nu$	$3.288 \times 10^{-1}$	ต่อวัน	สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต
อัตราการมีภูมิคุ้มกัน	$\phi$	$2.466 \times 10^{-1}$	ต่อวัน	สัญลักษณ์ ชัยชนะ2565,หน้า 401
อัตราการตายด้วยโรค	$\beta$	$1.4392 \times 10^{-7}$	ต่อวัน	สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต
อัตราการณรงค์ให้ความรู้ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี	$\Delta$	0 - 1		

โดย  $N$  คือ จำนวนประชากรในจังหวัดภูเก็ต

$\Omega$  คือ จำนวนการเกิดประชากร

$\mu$  คือ จำนวนประชากรที่ตายโดยธรรมชาติ

$\psi$  คือ จำนวนประชากรที่สัมผัสเชื้อ

$\beta$  คือ จำนวนประชากรที่ตายด้วยโรค

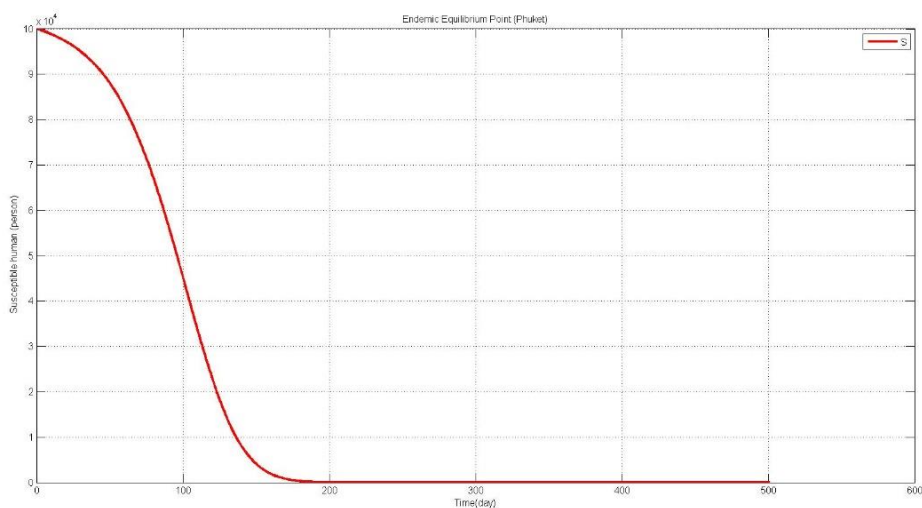
โดยที่  $\frac{\text{นำจำนวนประชากรในแต่ละค่า}}{\text{จำนวนประชากรทั้งหมด}} \times \frac{1}{365}$  จะได้ค่าพารามิเตอร์ดังตารางที่ 1

และจากตารางที่ 1 เมื่อนำค่าพารามิเตอร์แต่ละตัวเมื่อนำไปแทนค่าใน  $R_0 = \frac{(1-\Delta)\psi v N}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)}$

จะได้  $R_0 = 806.0462(1-\Delta)$  โดยที่  $0 < \Delta < 1$

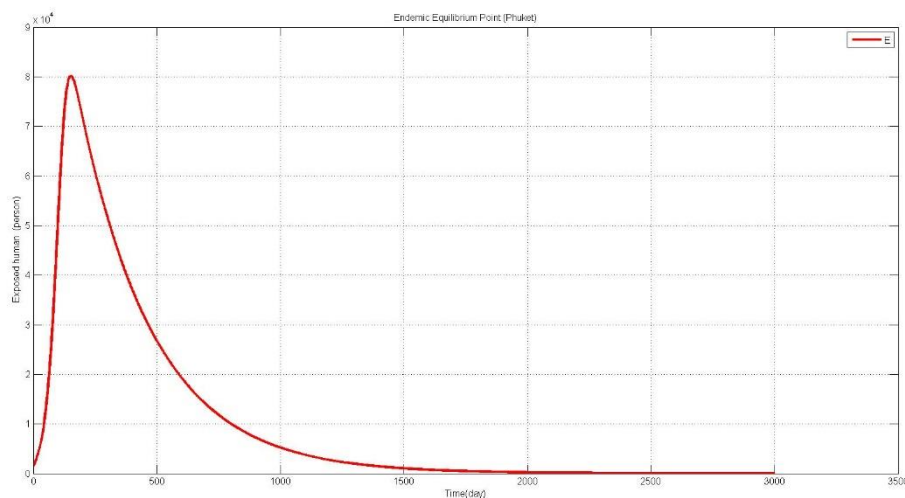
### ผลเชิงตัวเลข

สำหรับแบบจำลองที่กำหนดให้  $\Delta = 0$  ได้ผลเฉลย S, E, I และ R ดังภาพที่ 5, 6, 7 และ 8



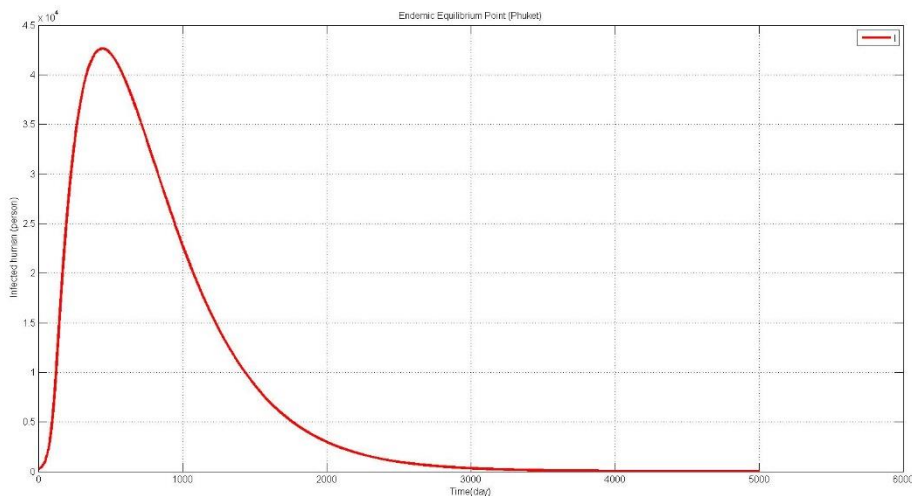
ภาพที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค ในจังหวัดภูเก็ต

จากภาพที่ 5 ค่าตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) เทียบกับเวลา (t) เป็นกราฟของเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรคในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ต โดยพบว่า ถ้าในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตมีผู้ติดเชื้อโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $I \neq 0$ ) เมื่อเวลาผ่านไปจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) จะมีแนวโน้มลดลงจนเข้าสู่จุดสมดุลที่  $S^*$



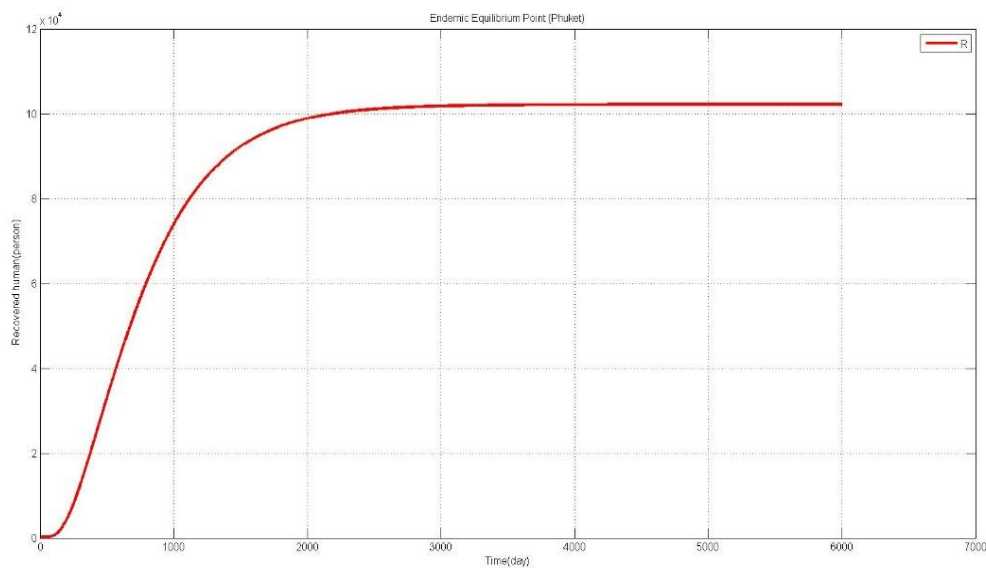
ภาพที่ 6 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา  $t$  ใด ๆ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค ในจังหวัดภูเก็ต

จากภาพที่ 6 ค่าตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) เทียบกับเวลา ( $t$ ) เป็นกราฟของเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรคในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ต โดยพบว่า ถ้าในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตมีผู้ติดเชื้อโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $I \neq 0$ ) เมื่อเวลาผ่านไปจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) จะมีแนวโน้มลดลงจนเข้าสู่จุดสมดุลที่  $E^*$



ภาพที่ 7 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) ณ เวลา  $t$  ใด ๆ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค ในจังหวัดภูเก็ต

จากภาพที่ 7 ค่าตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) เทียบกับเวลา (t) เป็นกราฟของเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรคในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ต โดยพบว่า ถ้าในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตมีผู้ติดเชื้อโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $I \neq 0$ ) เมื่อเวลาผ่านไปจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) จะมีแนวโน้มลดลงจนเข้าสู่จุดสมดุลที่  $I^*$

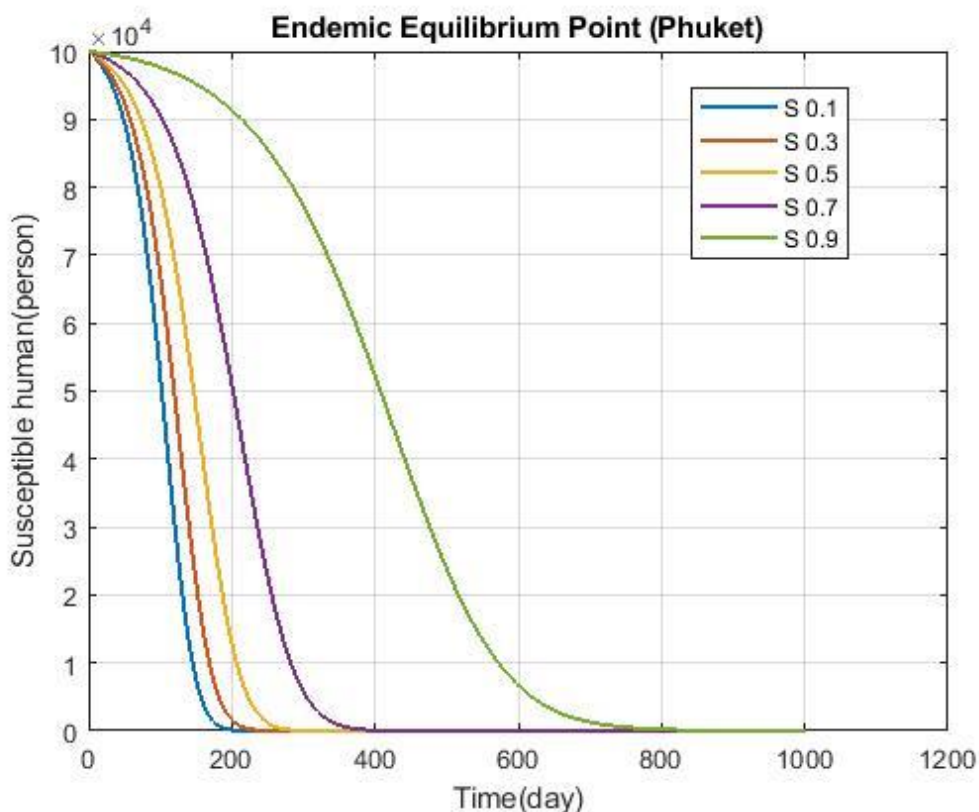


ภาพที่ 8 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) ณ เวลา t ใด ๆ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค ในจังหวัดภูเก็ต

จากภาพที่ 8 คำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนประชากรกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) เทียบกับเวลา (t) เป็นกราฟของเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรคในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ต โดยพบว่า ถ้าในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตมีผู้ติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบี ( $I \neq 0$ ) เมื่อเวลาผ่านไปจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) จะมีแนวโน้มลดลงจนเข้าสู่จุดสมดุลที่  $R^*$

### การวิเคราะห์อัตราการลดลงทำให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี

จากการศึกษาพบว่าอัตราการลดลงทำให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีเป็นปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการลดลงทำให้ความรู้ ดังนี้



ภาพที่ 9 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ

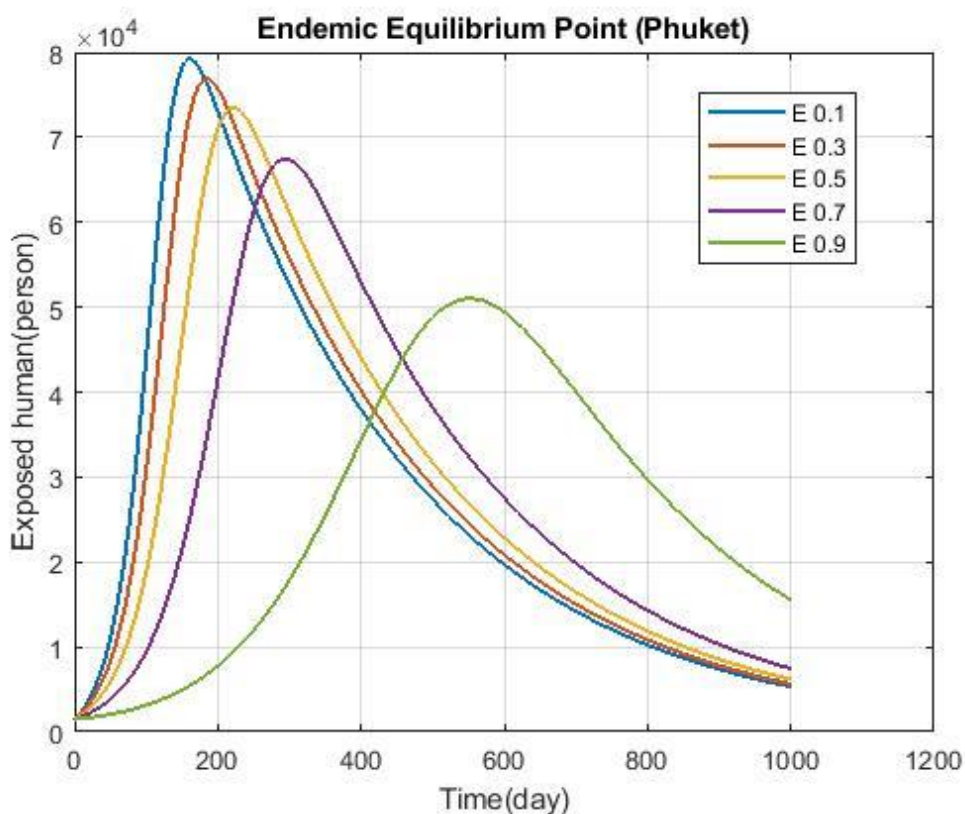
เมื่อค่า  $\Delta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  และ  $0.9$  ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุด สมดุลที่ไม่มีโรค

กรณี  $R_0 > 1$  เกิดการแพร่ระบาดของโรค ดังนั้น จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) เข้าสู่จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Endemic Equilibrium Point:  $E_1$ )

จากภาพที่ 9 คำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) เทียบกับเวลา (t) พบว่า การลดลงทำให้ความรู้เกี่ยวกับการป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี มีผลต่อจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) โดยพบว่า เมื่อเพิ่มอัตราการลดลงทำให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $\Delta$ ) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการลดลงป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ จะค่อยๆลดลงและเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ซึ่งถ้าประชากรมี



ความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบีเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จำนวนของประชากรกลุ่มเสี่ยงลดลงอย่างช้า ๆ และใช้เวลานานขึ้น นั่นหมายความว่ามีการแพร่ระบาดของโรคน้อยลง

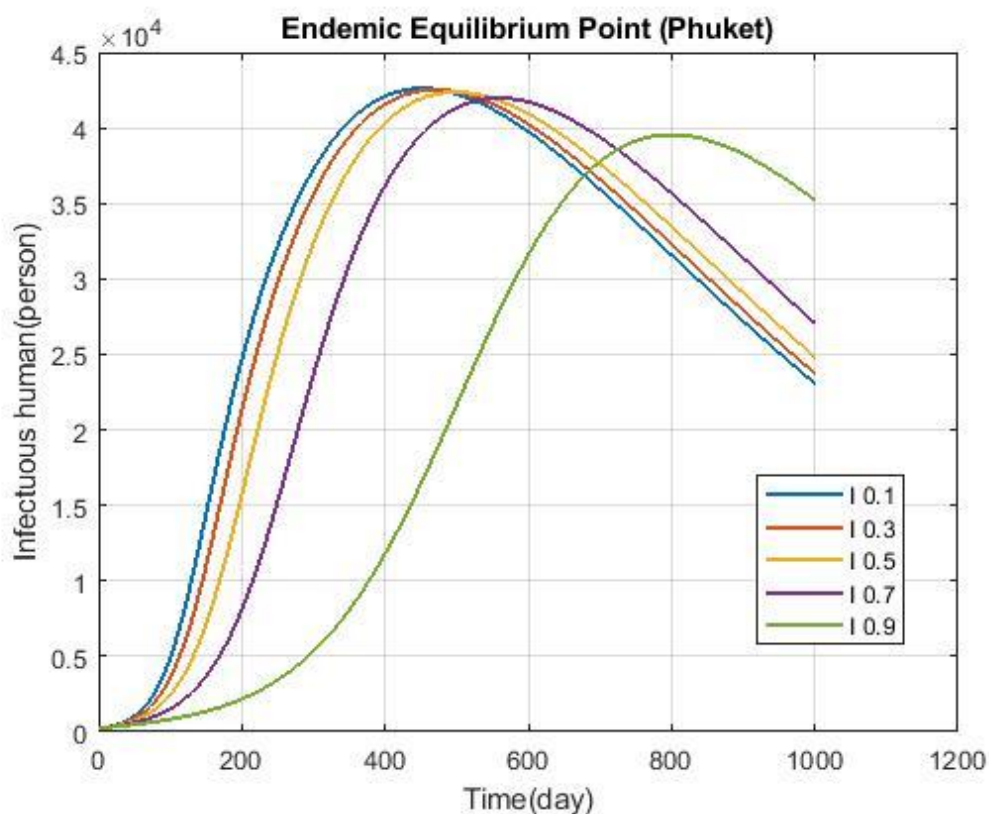


ภาพที่ 10 อัตรการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า  $\Delta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  และ  $0.9$  ตามลำดับ ณ สถิติรูปภาพของจุดสมดุลที่มีโรค

กรณี  $R_0 > 1$  เกิดการแพร่ระบาดของโรค ดังนั้น จำนวนประชากรของกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) เข้าสู่จุดสมดุลที่มีโรค (Endemic Equilibrium Point:  $E_1$ )

จากภาพที่ 10 คำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) เทียบกับเวลา (t) พบว่า การรณรงค์ให้ความรู้เกี่ยวกับการป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี มีผลต่อจำนวนกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) โดยพบว่า เมื่อเพิ่มอัตรการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $\Delta$ ) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีให้มากขึ้นจะพบว่า อัตรการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรของกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใด ๆ จะลดลง

อย่างเห็นได้ชัด และยังพบว่าจุดสูงสุดของประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจนซึ่งถ้าประชากรมีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบีเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้ประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการลดลงและการแพร่ระบาดของโรคจะลดลงด้วยเช่นกัน

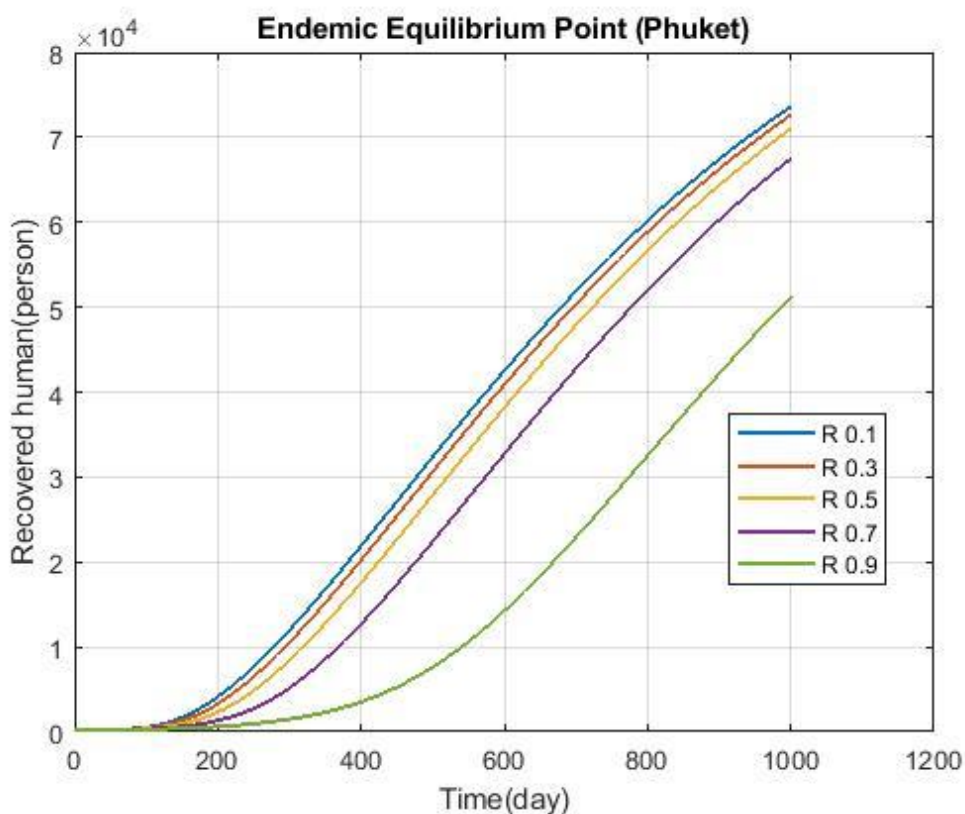


ภาพที่ 11 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ ( $I$ ) ณ เวลา  $t$  ใด ๆ เมื่อค่า  $\Delta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  และ  $0.9$  ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค

กรณี  $R_0 > 1$  เกิดการแพร่ระบาดของโรค ดังนั้น จำนวนประชากรของกลุ่มติดเชื้อ ( $I$ ) เข้าสู่จุดสมดุลที่มีโรค (Endemic Equilibrium Point:  $E_1$ )

จากภาพที่ 11 คำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนกลุ่มติดเชื้อ ( $I$ ) เทียบกับเวลา ( $t$ ) พบว่า การรณรงค์ให้ความรู้เกี่ยวกับการป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี มีผลต่อจำนวนกลุ่มติดเชื้อ ( $I$ ) โดยพบว่า เมื่อเพิ่มอัตราการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $\Delta$ ) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ ( $I$ ) ณ เวลา  $t$  ใด ๆ จะลดลงอย่างเห็นได้ชัด และยังพบว่าจุดสูงสุดของประชากรกลุ่มติดเชื้อ

เปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจนซึ่งถ้าประชากรมีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบีเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้ประชากรกลุ่มติดเชื้อลดลงและการแพร่ระบาดของโรคจะลดลงด้วยเช่นกัน



ภาพที่ 12 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า  $\Delta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  และ  $0.9$  ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค

กรณี  $R_0 > 1$  เกิดการแพร่ระบาดของโรค ดังนั้น จำนวนประชากรของกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) เข้าสู่จุดสมดุลที่มีโรค (Endemic Equilibrium Point:  $E_1$ )

จากภาพที่ 12 คำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) เทียบกับเวลา (t) พบว่า การรณรงค์ให้ความรู้เกี่ยวกับการป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี มีผลต่อจำนวนกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) โดยพบว่า เมื่อเพิ่มอัตราการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $\Delta$ ) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี จะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มที่หายป่วยจากโรครวดเร็วขึ้น เนื่องจากจำนวนคนติดเชื้อน้อยลงจึงส่งผลให้เกิดการแพร่ระบาดลดลง

## บทที่ 6

### สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

#### สรุป อภิปรายผลการวิจัย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ ประชากรที่ติดเชื้อ และประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์อัตราการรณรงค์ให้ความรู้ สำหรับป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $\Delta$ ) เป็นปัจจัยสำคัญในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้วใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมมูลที่มีโรค โดยการวิเคราะห์จุดสมมูลและเสถียรภาพของจุดสมมูลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน พบว่าขอบเขตของค่าคงที่ (Invariant Region) มีขอบเขตของค่าคงที่และช่วงคำตอบของ  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  และ  $R(t)$  อยู่ในช่วงจำนวนจริงบวก ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotical Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าระดับการติดเชื้อ  $R_0$  ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local Asymptotically stability of Equilibrium State ที่มีเสถียรในส่วนของจุดสมมูลที่ไม่มีโรคและจุดสมมูลที่มีโรค

จากการศึกษาพบว่าอัตราการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี เป็นปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการรณรงค์ให้ความรู้ โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคไวรัสตับอักเสบบี มีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบีน้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคไวรัสตับอักเสบบี มีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบีเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี

จากการศึกษาพบว่าอัตราการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี เป็นปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) ของการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ซึ่งอัตราการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $\Delta$ ) มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) ลดลง

การหาค่ารัศมีที่โดดเด่นของการแพร่ระบาดของโรค (Spectral radius) โดยใช้วิธีการ Next Generation Method เพื่อหาค่า spectral radius ( $R_0$ ) จากเมตริกซ์  $P(FV^{-1})$  ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) จากบทนิยาม Spectral radius ( $R_0$ ) จากเมตริกซ์  $FV^{-1}$  จะได้ค่าระดับการติดเชื้อ คือ  $R_0 = \frac{(1-\Delta)\psi v N}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)}$  ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรคโดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotical Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์  $R_0$  ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local Asymptotically stability of Equilibrium State ที่มีเสถียรในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคโดยที่  $R_0 = \frac{(1-\Delta)\psi v N}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)}$  สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) ในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตได้ค่า  $R_0 > 1$  วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค

จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local Asymptotical Stable ดังนั้นอัตราการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ( $\Delta$ ) มีค่ามากขึ้น ส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) ลดลง

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะได้ค่าลักษณะเฉพาะจาก  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_{2,3} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$  เมื่อ  $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$  โดย  $A = \phi + \beta + v + 2\mu$  และ  $B = (v+\mu)(\phi+\beta+\mu) - (1-\Delta)v\psi N$  ซึ่ง  $\lambda_2$  และ  $\lambda_3$  จะมีค่าเป็นลบ เมื่อ  $A > \sqrt{A^2 - 4B}$  และ  $A > 0, B > 0$  โดยพบว่าค่าลักษณะเฉพาะ  $\lambda_1, \lambda_2$  และ  $\lambda_3$  ซึ่งทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะเข้าสู่จุด  $E_0 = (100,000, 0, 0, 0)$  ดังนั้น จุดสมดุลไม่มีโรค  $E_0$  จะเป็น Local Asymptotically

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะได้ค่าลักษณะเฉพาะจากสมการ  $\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$  เมื่อ  $A = (1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + \phi + \beta + 3\mu$   
 $B = ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + v + 2\mu)(\phi + \beta + \mu) + ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v + \mu) - ((1-\Delta)\psi Nv\bar{S}^*$   
 $C = ((1-\Delta)\psi N\bar{I}^* + \mu)(v + \mu)(\phi + \beta + \mu) - (1-\Delta)\psi N\bar{S}^*\mu$  จะได้ว่า  $AB > C$  นั่นคือสมการ  $\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$  สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะเข้าสู่จุด

$$E_1(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*) = \left( \frac{\Omega}{(1-\Delta)\psi N \bar{I}^* + \mu}, \frac{\Omega}{(v+\mu)} - \frac{\mu(\phi+\beta+\mu)}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N v}, \frac{v\Omega}{(v+\mu)(\phi+\beta+\mu)} - \frac{\mu}{(v+\mu)(1-\Delta)\psi N} \right)$$

ดังนั้น จุดสมดุลมีโรค  $E_1$  จะเป็น Local Asymptotically

ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการณรงค์ให้ความรู้ นำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักโรคควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้านสาธารณสุข ดำเนินการหามาตรการควบคุมและป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการณรงค์ให้ความรู้ให้กับประชาชนทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตและในพื้นที่จังหวัดอื่น ๆ

## ข้อเสนอแนะ

### ข้อเสนอแนะจากผลงานวิจัย

1. งานวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการณรงค์ให้ความรู้ ได้กำหนดประชากรมนุษย์ให้มีจำนวนคงที่ดังนั้นหากไปใช้กับประชากรมนุษย์ที่มีการเปลี่ยนแปลงจำนวนประชากรอาจทำให้ผลคลาดเคลื่อนได้
2. งานวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการณรงค์ให้ความรู้ในครั้งนี้ ได้เก็บข้อมูลต่าง ๆ เฉพาะในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตเท่านั้นดังนั้นหากนำไปใช้ศึกษาในเขตพื้นที่อื่น ๆ ต้องเก็บข้อมูลเพิ่มเติมให้สอดคล้องกับแต่ละพื้นที่
3. ค่าพารามิเตอร์ที่เป็นการสอบถามความรู้สึก ผู้ให้ข้อมูลอาจไม่ได้ตอบตามความเป็นจริง อาจส่งผลข้อผิดพลาดต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ดังนั้นจะต้องทดลองเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์หลายค่าเพื่อศึกษาแนวโน้มและผลที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

### ข้อเสนอแนะในการทำงานวิจัยครั้งต่อไป

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโรคชนิดอื่นที่มีลักษณะการแพร่กระจายจากการสัมผัสและแพร่ระบาดคล้ายกับโรคไวรัสตับอักเสบบีได้
2. สามารถวิจัยและศึกษาองค์ประกอบอื่น ๆ ที่มีผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ได้แก่ การกักกันผู้ติดเชื้อ การฉีดวัคซีนป้องกันโรค เป็นต้น
3. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้สามารถนำไปใช้ศึกษาในเขตพื้นที่อื่น ๆ โดยการเก็บข้อมูลในเขตพื้นที่ที่ต้องการศึกษา

4. สามารถนำเทคนิควิธีวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ มาประยุกต์ใช้สำหรับวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ได้แก่ Optimization method, Perturbation method, Lyapunov functional method เป็นต้น



## บรรณานุกรม

- กัลยาณี กัลป์กลิ่น และคณะ. (2556). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมว. สุราษฎร์ธานี: มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.
- กิตติ กันภัย. (2543). สื่อสารมวลชนเบื้องต้น : สื่อมวลชน วัฒนธรรม และสังคม (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร : คณะนิเทศศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- แคลเลียา ดวงเกตุ. (2556). 20 คำถามสำคัญของคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 2). (น. 247–248). กรุงเทพมหานคร: มติชน.
- ณัฐกร จันทร์ชัย และคณะ. (2558). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน. สกลนคร: มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร.
- ธีรวัฒน์ นาคะบุตร. (2546). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์. นครปฐม: สถาบันราชภัฏนครปฐม.
- บรรยง คันธวะ. (2538). การตรวจหา ดี เอ็น เอ ของเชื้อไวรัสตับอักเสบบี ในกลุ่มผู้ป่วยโรคตับอักเสบบี ชนิดเรื้อรังและกลุ่มผู้ไม่ตอบสนองต่อการฉีดวัคซีนไวรัสตับอักเสบบี โดยวิธีการเพิ่มจำนวน ดี เอ็น เอ ในหลอดทดลอง .กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- บัณฑิตย์ อ้นยงศ์. (2558). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออกโดยใช้การณรงค์ให้ความรู้ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต. ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต.
- ปราโมทย์ เฉชะอำไพ และคณะ. (2560). พื้นฐานแมทแลบ (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พันธินี พงศ์สัมพันธ์. (2557). แบบจำลองเลียนแบบสำหรับการกระจายของโรคจูสวัดในประเทศไทย. กรุงเทพมหานคร: คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- ยุพา เอื้อวิจิตรอรุณ และคณะ. (2529). การติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบีชนิดบี ในบุคลากรทางวิทยาศาสตร์การแพทย์. ขอนแก่น: มหาวิทยาลัยขอนแก่น. โรงพยาบาลบำรุงราษฎร์. (2560). ไวรัสตับอักเสบบี. สืบค้น 13 สิงหาคม 2563, จาก <https://www.bumrungrad.com/th/conditions/hepatitis-b>. โรงพยาบาลศิริราช ปิยมหาราชการุณย์. (2560). รู้เท่าทัน ไวรัสตับอักเสบบี (HBV). สืบค้น 20 กันยายน 2563, จาก <https://www.siphospital.com/th/news/article/share/531>.
- วิรมณ ดุลยะศิริและคณะ. (2556). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคชิคุนกุนยาที่มีผลกระทบมาจากนักท่องเที่ยว. สุราษฎร์ธานี: มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.
- ศูนย์ข้อมูลโรคติดเชื้อและพาหะนำโรค. (2562). ไวรัสตับอักเสบบี. สืบค้น 10 กันยายน 2563, จาก



[http://webdb.dmsc.moph.go.th/ifc\\_nih/ez.mm\\_main.asp](http://webdb.dmsc.moph.go.th/ifc_nih/ez.mm_main.asp).

สุกัลยา ศรีสุริมัน. (2559). การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์. สืบค้น 13 กันยายน 2563, จาก

[http://elearning.nsruc.ac.th/web\\_elearning/math\\_model/introduction.html](http://elearning.nsruc.ac.th/web_elearning/math_model/introduction.html).

สุรัชตา สังข์ทองจีน. (2558). ผลของการรณรงค์ให้ความรู้ที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคตาแดง. สุราษฎร์ธานี: มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

สุภาวณี สัตยากรณ์. (2552). พีชคณิตเชิงเส้นและการประยุกต์. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สำนักกระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. (2562). ไวรัสตับอักเสบ . สืบค้น 13 ตุลาคม 2562, จาก <https://ddc.moph.go.th/disease.php>.

อนุวัตร จิรวัดนพามัช และคณะ. (2559ก). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย. การประชุมวิชาการระดับชาติมหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา ครั้งที่ 6, 15-16 สิงหาคม 2559. สงขลา: มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา.

อนุวัตร จิรวัดนพามัชและคณะ. (2559ข). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้. วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต ปีที่ 13 (2). (น. 254-275). ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต.

อรวรรณ ต้นสุข และพันธ์นี้ พงศ์สัมพันธ์. (2556). แบบจำลองการระบาดของโรคอีสุกอีใสในประเทศไทย. วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 22 ฉบับที่ 1 มกราคม-มิถุนายน 2556. (ฉ. 22(1): น. 39-52). กรุงเทพมหานคร: สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

Anderson, Roy M., and Robert M. May. (1991). *Infectious diseases of humans: dynamics and control*. Oxford: Oxford University Press.

Bureau of Epidemiology. (2019). Hepatitis . Retrieved 18 January 2019 . from <http://www.boe.moph.go.th/fact/HepatitisA.htm>.

C.M. Kribs-Zaleta, J.X. Valesco-Hernández. (2000). A simple vaccination model with multiple endemic states. *Mathematical Biosciences*, 164 (2): 183–201.

Fabien Zoulim.(2019). A Global Scientific Strategy to Cure hepatitis B.

Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 115: 700-721.

Publication, 6: 558-565.

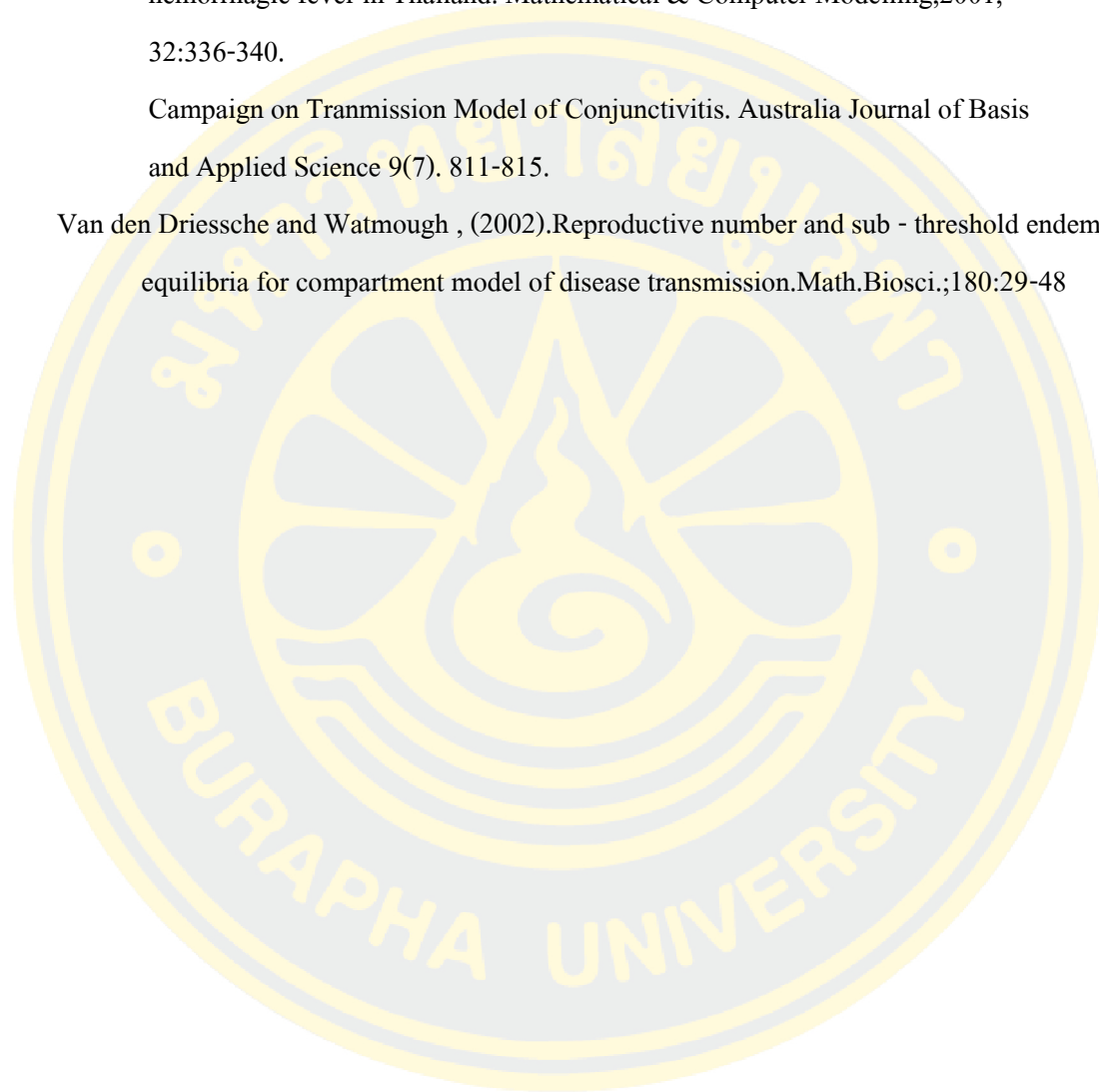
Leah Edelstein - Keshner.(1998).*Mathematical Model in Biology*.University of British Columbia

Vancouver, British Columbia, Canada.

P.Pongsumpun,I.Tang. A realistic age structured transmission model for dengue hemorrhagic fever in Thailand. *Mathematical & Computer Modelling*,2001, 32:336-340.

Campaign on Transmission Model of Conjunctivitis. *Australia Journal of Basis and Applied Science* 9(7). 811-815.

Van den Driessche and Watmough , (2002).Reproductive number and sub - threshold endemic equilibria for compartment model of disease transmission.*Math.Biosci.*;180:29-48



ภาคผนวก ก  
โค้ดตั้ง โปรแกรมแมทแลบ

```
clear;clc;
S(1,:)=100000;
E(1,:)=1500;
I(1,:)=250;
R(1,:)=150;
A=0.000031448;
w=0.0004776;
v=0.3288;
Q=0.2466;
u=0.000016937;
N=418785;
B=0.00000014392;
t=6000;h=0.01;
for m=1:t
S(m+1,:)=(S(m,:)+(h*(N)*A))/(1+(h*w*((I(m,:))))+(h*u));
E(m+1,:)=(E(m,:)+(h*w*(S(m+1,:))*I(m,:)))/(1+(h*(v+u)));
I(m+1,:)=((I(m,:)+(h*v*(E(m+1,:)))))/(1+(h*(Q+B+u)));
R(m+1,:)=((R(m,:)+(h*Q*(I(m+1,:)))))/(1+(h*u));
end
time = 0:h:t*h;
figure;
plot(time, S, 'linewidth', 2);
hold on;
plot(time, E, 'linewidth', 2);
plot(time, I, 'linewidth', 2);
plot(time, R, 'linewidth', 2);
grid on;
title('Endemic Equilibrium Point (Phuket)');
```

```

xlabel('Time (day)');
ylabel('Recovered human (person)');
legend('Susceptible', 'Exposed', 'Infected', 'Recovered');

clear;clc;
S(1,:)=100000;E(1,:)=1500; I(1,:)=250;R(1,:)=150;
A=0.000031448;w=0.0004776;v=0.3288;Q=0.2466;u=0.000016937;
N=418785;B=0.00000014392;t=1000;h=0.01; D=0.1;
for m=1:t
S(m+1,:)=((S(m,)+(h*(N)*A)))/(1+h*(1-D)*w*(I(m,))+h*u);
E(m+1,:)=((E(m,)+(h*((1-D)*w*S(m+1,)*I(m,)))))/(1+h*(v+u));
I(m+1,:)=((I(m,)+(h*v*E(m+1,))))/(1+h*(Q+B+u));
R(m+1,:)=((R(m,)+(h*Q*I(m+1,))))/(1+h*u);
m=m+1;%#ok<FXSET>
end
plot(I,'linewidth',1.5,'DisplayName', 'I 10%', 'YDataSource', 'I'); figure(gcf)
grid on;
title('Endemic Equilibrium Point (Phuket)');
xlabel('Time(day)');
ylabel('susceptible human(person)');
hold on;
clear;clc;
S(1,:)=100000;E(1,:)=1500; I(1,:)=250;R(1,:)=150;
A=0.000031448;w=0.0004776;v=0.3288;Q=0.2466;u=0.000016937;
N=418785;B=0.00000014392;t=1000;h=0.01; D=0.3;
for m=1:t
S(m+1,:)=((S(m,)+(h*(N)*A)))/(1+h*(1-D)*w*(I(m,))+h*u);
E(m+1,:)=((E(m,)+(h*((1-D)*w*S(m+1,)*I(m,)))))/(1+h*(v+u));
I(m+1,:)=((I(m,)+(h*v*E(m+1,))))/(1+h*(Q+B+u));
R(m+1,:)=((R(m,)+(h*Q*I(m+1,))))/(1+h*u);

```

```

m=m+1;%#ok<FXSET>
end
plot(I,'linewidth',1.5,'DisplayName', 'I 30%', 'YDataSource', 'I'); figure(gcf)
grid on;
title('Endemic Equilibrium Point (Phuket)');
xlabel('Time(day)');
ylabel('Infectives(person)');
clear;clc;
S(1,:)=100000;E(1,:)=1500; I(1,:)=250;R(1,:)=150;
A=0.000031448;w=0.0004776;v=0.3288;Q=0.2466;u=0.000016937;
N=418785;B=0.00000014392;t=1000;h=0.01; D=0.5;
for m=1:t
S(m+1,:)=((S(m,:)+(h*(N)*A)))/(1+h*(1-D)*w*(I(m,:))+h*u);
E(m+1,:)=((E(m,:)+(h*((1-D)*w*S(m+1,:)*I(m,:)))))/(1+h*(v+u));
I(m+1,:)=((I(m,:)+(h*v*E(m+1,:))))/(1+h*(Q+B+u));
R(m+1,:)=((R(m,:)+(h*Q*I(m+1,:))))/(1+h*u);
m=m+1;%#ok<FXSET>
end
plot(I,'linewidth',1.5,'DisplayName', 'I50%', 'YDataSource', 'I'); figure(gcf)
grid on;
title('Endemic Equilibrium Point (Phuket)');
xlabel('Time(day)');
ylabel('Infectives(person)');
clear;clc;
S(1,:)=100000;E(1,:)=1500; I(1,:)=250;R(1,:)=150;
A=0.000031448;w=0.0004776;v=0.3288;Q=0.2466;u=0.000016937;
N=418785;B=0.00000014392;t=1000;h=0.01; D=0.7;
for m=1:t
S(m+1,:)=((S(m,:)+(h*(N)*A)))/(1+h*(1-D)*w*(I(m,:))+h*u);
E(m+1,:)=((E(m,:)+(h*((1-D)*w*S(m+1,:)*I(m,:)))))/(1+h*(v+u));

```

```

I(m+1,:)=((I(m,:)+(h*v*E(m+1,:)))/(1+h*(Q+B+u));
R(m+1,:)=((R(m,:)+(h*Q*I(m+1,:)))/(1+h*u);
m=m+1;%#ok<FXSET>
end

plot(I,'linewidth',1.5,'DisplayName', 'I 70%', 'YDataSource', 'I'); figure(gcf)
grid on;
title('Endemic Equilibrium Point (Phuket)');
xlabel('Time(day)');
ylabel('susceptible human(person)');
clear;clc;
S(1,:)=100000;E(1,:)=1500; I(1,:)=250;R(1,:)=150;
A=0.000031448;w=0.0004776;v=0.3288;Q=0.2466;u=0.000016937;
N=418785;B=0.00000014392;t=1000;h=0.01; D=0.9;
for m=1:t
S(m+1,:)=((S(m,:)+(h*(N)*A)))/(1+h*(1-D)*w*(I(m,:))+h*u);
E(m+1,:)=((E(m,:)+(h*((1-D)*w*S(m+1,:)*I(m,:)))))/(1+h*(v+u));
I(m+1,:)=((I(m,:)+(h*v*E(m+1,:)))/(1+h*(Q+B+u));
R(m+1,:)=((R(m,:)+(h*Q*I(m+1,:)))/(1+h*u);
m=m+1;%#ok<FXSET>
end

plot(I,'linewidth',1.5,'DisplayName', 'I 90%', 'YDataSource', 'I'); figure(gcf)
grid on;
title('Endemic Equilibrium Point (Phuket)');
xlabel('Time(day)');
ylabel('Infectious human(person)');
legend('I 0.1','I 0.3','I 0.5','I 0.7','I 0.9')

```

## ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ-สกุล	นายเจษฎา สุจริตระการ
วัน เดือน ปี เกิด	12 มกราคม 2525
สถานที่เกิด	จังหวัดสงขลา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	40/15 ม.5 ต.ฉลอง อ.เมือง จ.ภูเก็ต 83130
ตำแหน่งและประวัติการ ทำงาน	อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต
ประวัติการศึกษา	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

