สถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ในระบบแผ่นประกบไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร

นภสินธุ์ ชำนาญ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

2565

สถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ในระบบแผ่นประกบไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร

นภสินธุ์ ชำนาญ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาฟิสิกส์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
2565

Inhomogeneous Superconducting State in Hybrid Superconductor-Ferromagnet Proximity Structures

NOPPASIN CHAMNAN

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR MASTER DEGREE OF SCIENCE
IN PHYSICS
FACULTY OF SCIENCE
BURAPHA UNIVERSITY
2022

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ได้พิจารณาวิทยานิพนธ์ของ นภสินธุ์ ชำนาญ ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยบูรพาได้

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

....

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญฤทธิ์ ครุนวการ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตรา เกตุแก้ว)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญฤทธิ์ ครุนวการ)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ศรัณย์ ภิบาลชนม์)

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร. อุษาวดี ตันติวรานุรักษ์)

วันที่..........เดือน....................พ.ศ.............

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยบูรพา อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยบูรพา

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.นุจรี ไชยมงคล)

วันที่..........เดือน....................พ.ศ.............

61910132: สาขาวิชา: ฟิสิกส์; วท.ม. (ฟิสิกส์)
คำสำคัญ: ปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค, สถานะ FFLO, อุณภูมิวิกฤต, ตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟร์โร

นภสินธุ์ ชำนาญ : สถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ในระบบแผ่นประกบไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร. (Inhomogeneous Superconducting State in Hybrid Superconductor-Ferromagnet Proximity Structures) คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์: บุญฤทธิ์ ครุนวการ ปี พ.ศ. 2565.

ในการศึกษาความไม่เสถียรของสถานะ Fulde – Ferrell – Larkin – Ovchinnikov (FFLO) ในโครงสร้างไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) แบบหลายเชิงที่ประกอบไปด้วยแกนโลหะเฟร์โรที่ถูกล้อมรอบด้วยเปลือกตัวนำยวดยิ่งนี้ ซึ่งจะศึกษาในกรอบของสมการอูซาเดลเชิงเส้น ปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค (LP effect) คือ ปรากฏการณ์ที่แสดงการแกว่งของอุณภูมิวิกฤตในตัวนำยวดยิ่ง Tc ที่แปรค่าตามฟลักซ์ซอยด์ โดยประยุกต์สนามแม่เหล็กเข้ากับแนวแกนของระบบแผ่นประกบ สถานะ FFLO เป็นตัวอย่างของสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ด้วยการแปรค่าเวกเตอร์คลื่นตามแนวแกนทรงกระบอกในแบบจำลองของเรา การตรวจสอบสถานะดังกล่าวจะทำผ่านปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค โดยใช้สมการอูซาเดลเพื่อคำนวณสูตร Tc ในเงื่อนไขเปลือกตัวนำยวดยิ่งผนังบาง ทำให้เราสามารถวิเคราะห์ความเป็นไปได้ที่จะพบสถานะนี้ในระบบ

61910132: MAJOR: PHYSICS; M.Sc. (PHYSICS)
KEYWORDS: Little-Parks effect, FFLO states, superconducting critical temperature, superconductor-ferromagnet

NOPPASIN CHAMNAN : INHOMOGENEOUS SUPERCONDUCTING STATE IN HYBRID SUPERCONDUCTOR-FERROMAGNET PROXIMITY STRUCTURES. ADVISORY COMMITTEE: BOONLIT KRUNAVAKARN, 2022.

In this study, the instability of the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) states in multiply connected hybrid superconductor-ferromagnet structures that consist of a ferromagnetic core surrounded by a superconducting shell within the framework of linearized Usadel equations. The Little-Parks (LP) effect is a phenomenon that displays the oscillations of the superconducting critical temperature Tc as the fluxoid varies, in the presence of an axial magnetic field applied to the proximity system. The FFLO states are the typical inhomogeneous superconducting states which represented by a modulation wavevector along the cylinder axis

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือจาก รองศาสตราจารย์ ดร. บุญฤทธิ์ ครุนวการ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้ความอนุเคราะห์ แนะนำแนวทางการแก้ปัญหา แก้ไขและปรับปรุงในข้อบกพร่องต่าง ๆ ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ รวมทั้งให้คำอธิบายองค์ความรู้ต่าง ๆ เป็นอย่างดียิ่ง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่สละเวลาเพื่อเป็นกรรมการสอบให้แก่ผู้วิจัย อีกทั้งยังกรุณาอ่าน ตรวจทาน แก้ไข และให้ความเห็นที่มีคุณค่า ทำให้วิทยานิพนธ์มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณประธานกรรมการสอบ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จิตรา เกตุแก้ว สังกัด ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี และกรรมการสอบ อาจารย์ ดร. ศรัณย์ ภิบาลชนม์ สังกัด ภาควิชาการจัดการเรียนรู้ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา และยังให้คำปรึกษาในเรื่องการคำนวณเชิงตัวเลข ตลอดจนงานวิจัยสำเร็จลุล่วง

ผู้วิจัยของขอบพระคุณบุคลากรของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ที่ให้ความช่วยเหลือในด้านการประสานงานและแนะนำเกี่ยวกับการจัดทำเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณครอบครัว ที่ให้ความช่วยเหลือ ทั้งด้านกำลังทรัพย์และด้านสภาพจิตใจตลอดมา รวมถึงพี่ น้อง เพื่อน ๆ และผู้ให้พลังบวกแก่ผู้วิจัยเสมอมา ท้ายที่สุด ผู้วิจัยมีความหวังเป็นอย่างยิ่งว่า วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์แก้ผู้ที่สนใจทฤษฎีตัวนำยวดยิ่งในหัวข้อแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ไม่มากก็น้อย และหากผิดพลาดประการใด ขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

นภสินธุ์ ชำนาญ

สารบัญ

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปี ค.ศ. 1911 คาเมอร์ลิงห์-โอนเนส (Heike Kamerlingh - Onnes) นักฟิสิกส์ชาวเนเธอร์แลนด์ได้ค้นพบสภาพนำไฟฟ้ายวดยิ่ง (superconductivity) จากการทดลองศึกษาการเปลี่ยนแปลงของสภาพต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์ที่อุณหภูมิต่ำ โดยใช้ฮีเลียมเหลวเป็นตัวลดอุณหภูมิด้วยเทคนิคภาวะเย็นยวดยิ่ง (cryogeenic) เพื่อศึกษาว่ามีพฤติกรรมเป็นไปตามทฤษฎีที่ได้ทำนายเอาไว้หรือไม่ โดยเขาได้ทำนายว่าความต้านทานจะลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลจนมีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่หนึ่งที่ศูนย์เคลวิน แต่ผลการทดลองไม่เป็นอย่างที่ทำนายเอาไว้ กล่าวคือ ความต้านทานไฟฟ้าของปรอทจะลดลงอย่างฉับพลันจนมีค่าน้อยมากและไม่สามารวัดได้ ณ อุณหภูมิประมาณ 4.2 เคลวิน จึงสรุปได้ว่าที่ค่าอุณหภูมินี้โลหะปรอทบริสุทธิ์ได้มีการเปลี่ยนเฟส (phase transition) จากโลหะปกติ (normal metal) กลายเป็นตัวนำยวดยิ่ง (superconductor) และเรียกอุณหภูมินี้ว่า อุณหภูมิวิกฤต (critical temperature) ซึ่งเป็นค่าที่ขึ้นกับสมบัติของสาร ต่อมาพบว่าสารที่สามารถเปลี่ยนสถานะเป็นตัวนำยวดยิ่งมีหลายชนิด มีทั้งชนิดที่เป็นธาตุบริสุทธิ์และสารประกอบ ยิ่งไปกว่านั้นอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งมีค่าสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤตแล้วตัวนำยวดยิ่งจะสูญเสียสภาพยวดยิ่งและกลับไปเป็นตัวนำปกติทันที สิ่งนี้หมายถึง ตัวนำยวดยิ่งเป็นกระบวนการผันกลับได้ (reversible process) นอกจากปัจจัยด้านอุณหภูมิแล้วยังมีปัจจัยอื่นที่สามารถทำลายสภาพยวดยิ่งได้ เช่น ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (current density) โอนเนสได้ทำการทดลองแล้วพบว่าถ้าความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้ามีค่าสูงกว่าค่าๆหนึ่ง สถานะยวดยิ่งจะถูกทำลายทันที เรียกความหนาแน่นนี้ว่า ความหนาแน่นกระแสวิกฤต (critical current density) หรือแม้กระทั่งสนามแม่เหล็ก (magnetic field) ก็สามารทำลายสภาพยวดยิ่งบางชนิดได้เช่นกัน กล่าวคือ สภาพยวดยิ่งจะถูกทำลายหากสนามแม่เหล็กมีความเข้มมากกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤต (critical magnetic field) อย่างไรก็ดี ตัวนำยวดยิ่งจะถูกแบ่งออกเป็นสองประเภท ได้แก่ ตัวนำยวดยิ่งประเภทที่หนึ่ง (type I superconductor) และตัวนำยวดยิ่งประเภทที่ 2 (type II superconductor) [1]

ตัวนำยวดยิ่งประเภทที่หนึ่ง (type I superconductor)

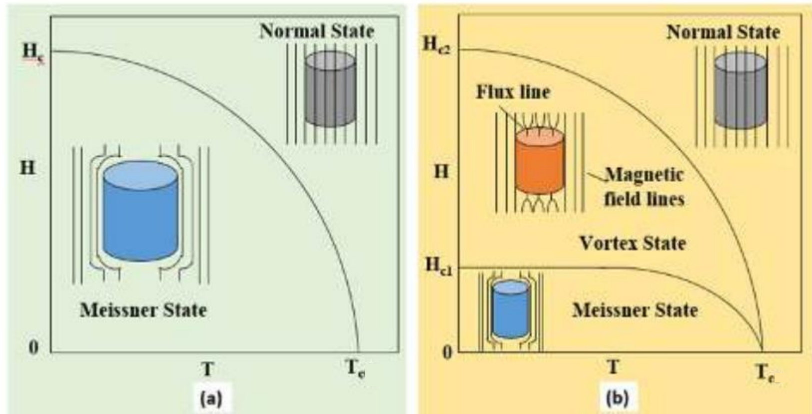
โดยส่วนใหญ่แล้วตัวนำยวดยิ่งประเภทที่หนึ่งจะเป็นธาตุ เมื่อให้สนามแม่เหล็กภายนอกต่ำกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤต ซึ่งจะแสดงความสามารถในการผลักสนามแม่เหล็กได้อย่างสมบูรณ์หรือเกิดปรากฏการณ์ที่ฟลักซ์แม่เหล็กถูกกีดกัด (flux exclusion) ออกจากบริเวณภายในตัวนำยวดยิ่งเชิงปริมาตร (bulk superconductor) ที่รู้จักกันดีในชื่อ ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Meissner effect) หรืออยู่ในสถานะไมสเนอร์ (Meissner state) มีพฤติกรรมดังรูปที่ 1(a) เมื่อ $H_c(0)$ และ $H_c(T)$ คือสนามแม่เหล็กวิกฤต (critical magnetic field) ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์และที่อุณหภูมิใดๆ ตามลำดับ โดย T_c คือ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง จากรูป 1(a) เมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอกการเปลี่ยนเฟสจากเฟสสถานะปกติไปสู่เฟสตัวนำยวดยิ่งจะเกิดที่ T_c โดยเป็นการเปลี่ยนเฟสอันดับสอง (second-order phase transition) กล่าวคือ ไม่มีความร้อนแฝงในการเปลี่ยนเฟส แต่หากมีสนามแม่เหล็กภายนอกแล้วการเปลี่ยนเฟสจากเฟสสถานะปกติไปสู่เฟสตัวนำยวดยิ่งจะเกิดขึ้นที่อุณหภูมิที่ต่ำลง หมายความว่า สภาพยวดยิ่งที่อุณหภูมิ T ถูกทำลายได้เมื่อใส่สนามแม่เหล็กที่สูงกว่าสนามวิกฤต H_c ที่อุณหภูมิ T ซึ่งค่าสนามแม่เหล็กดังกล่าวจะมีความสัมพันธ์กับผลต่างระหว่างค่าความหนาแน่นพลังงานอิสระของสถานะโลหะปกติ f_{nm} และตัวนำยวดยิ่ง f_{sc} ในกรณีไร้สนามภายนอกตามสมการ

$$f_{nm} - f_{sc} = H_c^2(T)/8\pi$$

และสนามวิกฤตแปรผันตามอุณหภูมิในขอบเขต $0 < T < T_c$ มีสูตรแบบประมาณในรูปพาราโบลา

$$H_c(T) \approx H_c(0)\left[1-(T/T_c)^2\right]$$

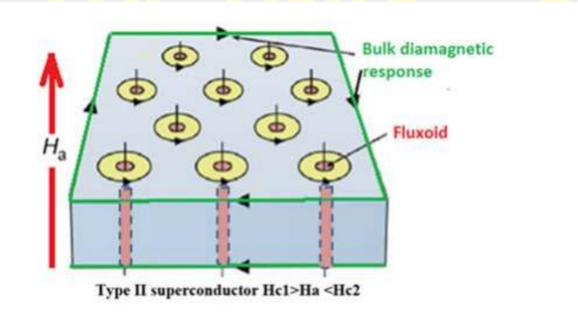
จะเห็นได้ว่าการลดอุณหภูมิจนกระทั่งต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตหรือการประยุกต์สนามแม่เหล็กภายนอกให้ผลลัพธ์เดียวกันคือ ฟลักซ์แม่เหล็กเป็นศูนย์ภายในตัวนำยวดยิ่ง ซึ่งหมายความว่าตัวนำยวดยิ่งแสดงสมบัติ สภาวะแม่เหล็กไดอะสมบูรณ์ (perfect diamagnetism) อย่างไรก็ดี การประยุกต์สนามแม่เหล็กเข้าไปแต่ฟลักซ์แม่เหล็กยังคงติดอยู่ในตัวนำยวดยิ่งบางส่วน กล่าวคือ ผลักสนามแม่เหล็กได้ไม่สมบูรณ์ พฤติกรรมของตัวนำยวดยิ่งลักษณะนี้ถูกจัดให้เป็นตัวนำยวดยิ่งประเภทที่สอง



รูปที่ 1 (a) แผนภาพเฟสของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่หนึ่ง (b) แผนภาพเฟสของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่สอง อ้างอิงรูปจากงาน [2]

ตัวนำยวดยิ่งประเภทที่สอง (type II superconductor)

โดยส่วนใหญ่แล้วตัวนำยวดยิ่งประเภทที่สองจะเป็นโลหะผสมที่แสดงความสามารถในการผลักสนามแม่เหล็กได้ไม่สมบูรณ์หรืออยู่ในสถานะผสม (mixed state) และมีพฤติกรรมดังรูปที่ 1(b) ซึ่งจะมีค่าสนามแม่เหล็กสองค่า คือ สนามแม่เหล็กวิกฤตล่าง (lower critical field ; H_{c1}) และสนามแม่เหล็กวิกฤตบน (upper critical field ; H_{c2}) จากรูป 2 เมื่อใส่สนามแม่เหล็กภายนอก H_a เข้าไปต่ำกว่า H_{c1} ตัวนำยวดยิ่งจะแสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์อย่างสมบูรณ์เช่นเดียวกับตัวนำยวดยิ่งประเภทที่หนึ่ง



รูปที่ 2 สถานะผสม (mixed state) ของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่สองที่ประยุกต์สนาม $H_{c1} < H_a < H_{c2}$ อ้างอิงรูปจากงาน [2]

แต่หากเพิ่มสนามแม่เหล็กภายนอก H_a จนกระทั่งมีค่าสูงกว่า H_{c1} แต่น้อยกว่า H_{c2} ตัวนำยวดยิ่งจะแสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์ไม่สมบูรณ์ เนื่องจากสนามแม่เหล็กส่วนหนึ่งที่สามารถทะลุผ่านในเนื้อตัวนำยวดยิ่งได้ กล่าวคือ สนามแม่เหล็กในเนื้อตัวนำยวดยิ่งถูกผลักออกบางส่วนแม้ว่าจะมีกระแสไฟฟ้าอยู่ที่ผิวที่ต้านสนามภายนอกแต่ต้านไม่หมด ยิ่งไปกว่านั้นในเนื้อตัวนำยวดยิ่งจะมีกระแสที่เหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กในทิศเดียวกับสนามแม่เหล็กภายนอกอีกด้วย หรือกล่าวได้ว่าตัวนำยวดยิ่งประเภทที่สองมีพฤติกรรมแบบฮีสเทอริติก (hysteretic) [3] ที่แสดงถึงการก่อเกิดสถานะวอร์เทค (vortex state) และหากสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่ามากกว่าตัวนำยวดยิ่งจะเปลี่ยนเฟสเป็นสถานะปกติทันที โดยทั่วไปแล้วตัวนำยวดยิ่งประเภทที่สองจะมีค่า H_{c2} สูง จึงเหมาะแก่การนำมาประยุกต์ใช้งาน

1.1.1 สมบัติบางประการของสภาพยวดยิ่ง (some properties of superconductivity)

จากที่กล่าวไปข้างต้น สำหรับคุณสมบัติของปรอทบริสุทธิ์ที่สามารเปลี่ยนสถานะจากโลหะปกติกลายเป็นสถานะยวดยิ่งได้ ณ อุณหภูมิวิกฤตที่ประมาณ 4.2 เคลวิน ซึ่งอันที่จริงแล้วสมบัติของตัวนำยวดยิ่งมีหลายอย่าง ยกตัวอย่างเช่น ฟลักซ์ควอนไทซ์ ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ การกระโดดของค่าความจุความร้อนจำเพาะ และปรากฏการณ์โจเซฟสัน เป็นต้น แต่ในหัวข้อนี้จะทำการกล่าวเชิงสรุปของคุณสมบัติที่สำคัญของตัวนำยวดยิ่งบางประการ ได้แก่ ฟลักซ์ควอนไทซ์ และปรากฏการณ์ไมสเนอร์

ฟลักซ์ควอนไทซ์ (flux quantization)

พิจารณาตัวนำยวดยิ่งรูปวงแหวนโดยใส่สนามแม่เหล็กเข้าไป ขณะที่ตัวนำยวดยิ่งมีอุณหภูมิสูงกว่าค่าอุณหภูมิวิกฤต สนามแม่เหล็กดังกล่าวจะพุ่งผ่านตัวนำยวดยิ่งได้ปกติ แต่เมื่อลดอุณหภูมิให้ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตในขณะเดียวกันนำสนามแม่เหล็กออก สิ่งที่พบคือ สนามแม่เหล็กที่ใส่เข้าไปตอนแรกจะถูกกักให้อยู่ภายในวงแหวนของตัวนำยวดยิ่ง กล่าวคือ แม้ว่าเรายุติการเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กแต่ภายในวงแหวนยังคงมีกระแสที่เกิดจากสนามแม่เหล็กโดยกระแสจะไหลวนรอบวงแหวนยวดยิ่ง ซึ่งจะเหนี่ยวนำทำให้เกิดฟลักซ์แม่เหล็กพุ่งผ่านพื้นที่วงแหวน และจากกฎการควอนไทซ์ของบอร์ (Bohr quantization rule) ทำให้ได้ว่าฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ) ที่ถูกกักอยู่ในวงแหวนจะมีค่าเท่ากับ $\Phi = n(hc/2e)$ เมื่อ n, h, c และ e คือ จำนวนเต็ม ค่าคงที่ของแพลงค์ อัตราเร็วแสง และประจุอิเล็กตรอน ตามลำดับ โดยรายละเอียดจะกล่าวถึงภายหลังในหัวข้อฟลักซ์ซอยด์ (fluxoid)

ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Meissner effect)

เมื่อนำโลหะที่สามารถกลายเป็นตัวนำยวดยิ่งได้มาวางบนแท่งแม่เหล็กที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต โลหะดังกล่าวยอมให้สนามแม่เหล็กทะลุผ่านภายในเนื้อได้ แต่หากลดอุณหภูมิให้มีค่าต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตแล้วโลหะจะกลายเป็นตัวนำยวดยิ่งและผลักสนามแม่เหล็กภายนอก (external magnetic field ; $\mathbf{H}$) ออกจากตัวมัน เพราะว่ามันสร้างกระแสไฟฟ้าวิ่งในบริเวณผิวขึ้นในลักษณะที่หักล้างกับสนามแม่เหล็กภายนอก กล่าวคือ ตัวนำยวดยิ่งแสดงสมบัติเป็นสภาวะแม่เหล็กไดอะสมบูรณ์ (perfect diamagnetism) ซึ่งความสามารถในการผลักสนามแม่เหล็กดังกล่าวถูกค้นพบโดยนักฟิสิกส์ชาวเยอรมันสองท่านคือ ไมสเนอร์ (Meissner) และ โอเชนเฟลด์ (Ochsenfeld) จึงเรียกสมบัตินี้ว่า ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Meissner effect) และยังเป็นรากฐานที่สำคัญของการกำเนิดรถไฟฟ้าความเร็วสูงที่รู้จักกันดีในชื่อ รถไฟแม็กแลฟ (Maglev Train)

1.1.2 สมการลอนดอน (London Equations)

ในปี ค.ศ. 1935 สองพี่น้องตระกูลลอนดอน ฟริทซ์ ลอนดอน (Fritz London) และ ไฮนซ์ลอนดอน (Heinz London) ได้เสนอทฤษฎีเชิงปรากฏการณ์ (phenomenological theory) ในการอธิบายคุณสมบัติพื้นฐานทางพลศาสตร์ไฟฟ้า (electrodynamic) ของตัวนำยวดยิ่ง โดยอาศัยพื้นฐานความรู้ที่ได้มาจากการสังเกตผลการทดลองและเริ่มต้นจากการใช้สมการการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนตามแบบจำลองของดูรเด (Drude model) [4] ซึ่งทำให้ได้สมการลอนดอนออกมาสองสมการ ที่สามารถบรรยายความสัมพันธ์ระหว่างกระแสยวดยิ่ง สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กดังนี้

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda \mathbf{J}_{\mathbf{s}}\right) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{B} = -c\nabla \times \left(\Lambda \mathbf{J}_{\mathbf{s}}\right) \tag{1.2}$$

สมการที่ (1.1) ถูกเรียกว่า สมการแรกของลอนดอน (London first equation) และจะเรียกสมการที่ (1.2) ว่าเป็น สมการที่สองของลอนดอน (London second equation) โดยที่ $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{B}$ คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ตามลำดับ $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$ คือ กระแสยวดยิ่ง (supercurrent) และ $\Lambda = m^{*}/n_{s}e^{*2}$ คือ พารามิเตอร์เชิงปรากฏการณ์ (phenomenological parameter) ที่แสดง

ความสามารถกระแสยวดยิ่งที่มีต่อสนาม n_s, m^* และ e^* คือ จำนวนอิเล็กตรอนต่อปริมาตรในตัวนำยวดยิ่ง มวล และประจุของอนุภาคที่นำกระแสยวดยิ่ง ตามลำดับ ซึ่งภายหลังพบว่า m^* และ e^* จะมีค่าเป็นสองเท่าของมวลและประจุของอิเล็กตรอน ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการแรกของลอนดอน (สมการที่ 1.1) บ่งชี้ถึงความสามารถในการนำไฟฟ้ายวดยิ่ง เนื่องจากสนามไฟฟ้าไม่เพียงแต่รักษาความเร็วในตัวนำปกติตามกฎของโอห์ม แต่มันยังทำให้อิเล็กตรอนมีความเร่งอีกด้วย และสำหรับสมการของลอนดอนอีกหนึ่งสมการ (สมการที่ 1.2) เมื่อนำมาใช้ร่วมกับสมการแม็กซ์เวล $\nabla\times\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J}/c$ จะนำมาสู่

$$\nabla^2\mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda \tag{1.3}$$

สมการที่ (1.3) สามารถนำไปใช้บรรยายปรากฏการณ์ไมสเนอร์ กล่าวคือ สนามแม่เหล็กถูกผลักออกจากเนื้อตัวนำยวดยิ่ง โดยในเนื้อตัวนำยวดยิ่งจะยอมให้สนามแม่เหล็กเข้าไปลึกเป็นลักษณะเอกซ์โพเนนเชียลแบบลดลง ซึ่งความลึกที่ตัวนำยวดยิ่งยอมให้สนามแม่เหล็กทลวงเข้าไปได้นั้น เราเรียกว่า ความลึกทะลุทะลวง (penetration depth ; λ) โดยมีความสัมพันธ์กับพารามิเตอร์เชิงปรากฏการณ์ คือ $\lambda = c\sqrt{\Lambda/4\pi}$ ลำดับต่อไปจะแสดงรายละเอียดการประยุกต์สมการลอนดอนที่สองก่อน เนื่องจากมีจุดประสงค์ในการอธิบายการทะลุทลวงของสนามแม่เหล็กในเนื้อตัวนำยวดยิ่ง ในที่นี้จะพิจารณาลักษณะของระบบง่ายที่สุด [6] ที่เรียกว่า แผ่นระนาบกึ่งอนันต์ (semi-infinite slab) นั่นก็คือ การกำหนดให้พื้นผิวของตัวนำยวดยิ่งอยู่ในระนาบ xy โดยเนื้อตัวนำยวดยิ่งจะอยู่ในบริเวณ $z > 0$ และ $z < 0$ และสมมติให้สนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าเป็น $\mathbf{B}^{\mathrm{ext}} = B_0\hat{i}$ ซึ่งเราสามารถใช้สมการลอนดอนมาคำนวณหาว่าสนามแม่เหล็กในเนื้อตัวนำยวดยิ่งจะมีลักษณะเช่นไรในเชิงปริมาตร เริ่มจากใช้ประโยชน์ของสมการแมกซ์เวลล์

$$\nabla\times\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J}/c \tag{1.4}$$

ทำการเคิร์ล (curl) ตลอดทั้งสมการ (1.4) และพิจารณาในเนื้อตัวนำยวดยิ่ง

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{B} = (4\pi/c)\nabla\times\mathbf{J}_s \tag{1.5}$$

ใช้สมการที่ (1.2) และสังเกตฝั่งขวามือของสมการที่ (1.5) จะกลายเป็น $-\left(4\pi/c^2\Lambda\right)\mathbf{B}$ จากนั้นให้ใช้ประโยชน์จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ (vector identity) เพื่อพิจารณาฝั่งซ้ายมือ[1]ของสมการที่ (1.5) ดังนั้น สมการที่ (1.5) สามารถเขียนได้ว่า

$$\nabla^2\mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda^2 \tag{1.6}$$

เมื่อ $\lambda = c\sqrt{\Lambda/4\pi}$ คือ ความลึกทะลุทะลวงของลอนดอน (London penetration depth) ตามลักษณะของระบบสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ จะมีทิศทางตาม $\mathbf{B}^{\mathbf{ext}}$ กล่าวคือ มันจะขนานกับพื้นผิวของตัวนำยวดยิ่งในทิศ $+x$ แต่จะมีขนาดขึ้นอยู่กับแกน z เท่านั้น จึงเขียนสมการที่ (1.6) ใหม่ที่อยู่ในรูปอย่างง่าย นั่นก็คือ

$$\frac{d^2B}{dz^2} = B/\lambda^2 \tag{1.7}$$

สมการที่ (1.7) คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไป (general solution) คือ

$$B(z) = A_1\exp(-z/\lambda) + A_2\exp(z/\lambda)$$

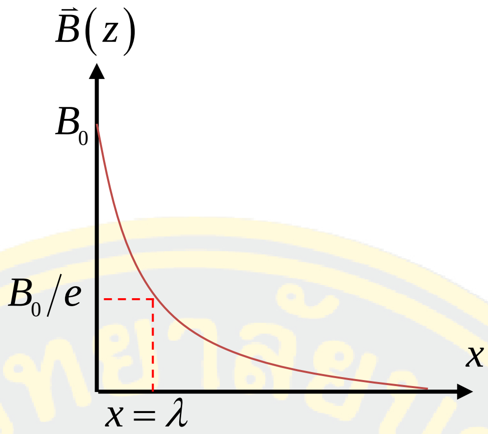
พึงตระหนักว่าสนามแม่เหล็กในเนื้อตัวนำยวดยิ่งไม่สามารถมีค่าเพิ่มขึ้นได้ จึงสามารถตัดเทอมที่สองทิ้งไปหรือสัมประสิทธิ์เทอมสองต้องเป็นศูนย์ $(A_2 = 0)$ ในขณะเดียวกันเราอาศัยความจริงที่ว่าบริเวณที่ผิว $(z = 0)$ สนามแม่เหล็กจะต้องมีค่าเท่ากับค่าเริ่มต้น B_0 เงื่อนไขนี้ทำให้เราได้ค่าสัมประสิทธิ์ $A_1 = B_0$ ดังนั้น สนามแม่เหล็กในเนื้อตัวนำยวดยิ่งจะถูกบรรยายด้วย

$$B(z) = B_0\exp(-z/\lambda) \tag{1.8}$$

ในสมการที่ (1.8) หมายความว่า สนามแม่เหล็กในตัวนำยวดยิ่งจะมีค่าลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า สนามแม่เหล็กถูกผลักออกในเนื้อตัวนำยวดยิ่งและที่ความลึกจากผิว λ สนามแม่เหล็กจะมีขนาดลดลงเป็น $1/e$ เท่าของที่พื้นผิว (B_0/e) ดังรูปที่ 3

---

[1] เอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla\times\nabla\times\mathbf{B} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}$ และจากกฎของเกาส์ในสนามแม่เหล็กที่ว่า $\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{dS} = 0$ และใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนท์ (divergence theorem) ที่ว่า $\int_V (\nabla\cdot\mathbf{B})dV = \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{dS}$ จึงได้ว่า $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ ซึ่งเป็นผลทำให้พจน์แรกเป็นศูนย์



รูปที่ 3 แสดงค่าสนามแม่เหล็กที่บริเวณต่างๆของระบบแผ่นระนาบกึ่งอนันต์ (semi-infinite slab)

อีกทั้งเรายังสามารถคำนวณค่ากระแสยวดยิ่งภายในเนื้อตัวนำยวดยิ่งได้จาดสมการแมกซ์เวล $\nabla\times\mathbf{B}=4\pi\mathbf{J}/c$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\mathbf{J}_s=(c/4\pi)\nabla\times\mathbf{B}=(c/4\pi)\left[\frac{d}{dz}\hat{k}\times B_0\exp(-z/\lambda)\hat{i}\right]$$

$$\mathbf{J}_s=-\frac{cB_0}{4\pi\lambda}\hat{j} \tag{1.9}$$

สังเกตได้ว่ากระแสไฟฟ้าในเนื้อตัวนำยวดยิ่งจะเหนี่ยวนำให้เกิดสนามแม่เหล็กที่ต่อต้านสนามแม่เหล็กภายนอกขึ้นมาและมีพฤติกรรมเหมือนกับสนามแม่เหล็กในเนื้อตัวนำยวดยิ่ง เป็นคำอธิบายในปรากฏการณ์ไมสเนอร์ว่าทำไมตัวนำยวดยิ่งถึงแสดงสภาวะแม่เหล็กไดอะที่สมบูรณ์ (perfect diamagnetism)

1.1.3 ฟลักซ์ซอยด์ (Fluxoid)

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นถึงฟลักซ์ควอนไทซ์ [5] เริ่มจากพิจารณาตัวนำยวดยิ่งรูปทรงกระบอกกลวง (วงแหวน) ที่มีสนามแม่เหล็กพุ่งผ่านบริเวณส่วนกลวง ฟริทซ์ ลอนดอน (Fritz London) ได้เสนอแนวคิดของฟลักซ์ซอยด์ (Φ') ที่เกี่ยวข้องกับส่วนที่กลวงผ่านตัวนำยวดยิ่ง โดย

แนวคิดของเขาเริ่มจากทำการเคิร์ลตลอดสมการที่ (1.1) นั่นคือ $\nabla\times\mathbf{E}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\Lambda\mathbf{J}_{\mathbf{s}}\right)$ และใช้สมการที่ (1.2) ที่ว่า $\nabla\times\left(\Lambda\mathbf{J}_{\mathbf{s}}\right)=-\mathbf{B}/c$ จะได้ว่า

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}=0 \tag{1.10}$$

จากนั้นให้ทำการอินทิเกรตตลอดสมการ (1.10) บนพื้นผิว S ทำให้ได้

$$\int\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{dS}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS}=0$$

จัดรูปใหม่โดยเทอมแรกจะใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์[2] (Stokes' Theorem) ทำให้ได้

$$\oint_C\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS}=0$$

จากนั้นให้ใช้สมการ (1.1) เพื่อเขียนเทอมแรกในรูปอนุพันธ์เทียบกับเวลา แล้วจึงดึงพจน์อนุพันธ์ที่เป็นตัวร่วมออกมา จะนำมาสู่

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\oint_C c\Lambda\mathbf{J}_{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{dl}+\int\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS}\right)=0 \tag{1.11}$$

ฟริทซ์ ลอนดอน จึงทำการนิยามฟลักซ์ซอยด์

$$\Phi'=\oint_C c\Lambda\mathbf{J}_{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{dl}+\int\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS} \tag{1.12}$$

จากสมการที่ (1.11) และ (1.12) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi'=0 \tag{1.13}$$

ตามสมการที่ (1.13) จะเห็นได้ว่า ฟลักซ์ซอยด์ Φ' ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา สิ่งนี้หมายความว่า หากสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ เปลี่ยนแปลงแล้วกระแสยวดยิ่ง $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$ ก็ต้องเปลี่ยนแปลงเช่นกัน ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของปริมาณทั้งสองนี้จะต้องไม่ทำให้ฟลักซ์ซอยด์ Φ' มีการเปลี่ยนแปลง และต่อมาเราทราบว่าอนุภาค

---

[2] ทฤษฎีบทของสโตกส์ (Stokes' Theorem) $\int\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\cdot d\vec{S}=\oint_C\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$

ที่กำลังเคลื่อนที่อยู่ในสนามแม่เหล็กจะมีโมเมนตัมในรูปแบบบัญญัติ (canonical momentum) ในตัวนำยวดยิ่งเป็น

$$\mathbf{p_s} = m^*\mathbf{v_s} + \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \tag{1.14}$$

จึงหาความสัมพันธ์ในรูปอย่างง่ายระหว่างสมการที่ (1.12) และ (1.14) กล่าวคือ จะหาความสัมพันธ์ของฟลักซ์ซอยด์ Φ' กับโมเมนตัม $\mathbf{p_s}$ โดยใช้ความสัมพันธ์ของสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ กับศักย์เวกเตอร์ (vector potential ; $\mathbf{A}$) ที่ว่า $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ จึงทำให้ได้สมการที่ (1.12) เป็น

$$\Phi' = \int(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{dS} + \oint_C c\Lambda \mathbf{J_s} \cdot \mathbf{dl}$$

เช่นเดิมเทอมแรกฝั่งขวามือของสมการเราจะใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์เข้ามาช่วยพิจารณา จะได้

$$\Phi' = \oint_C (\mathbf{A} + c\Lambda \mathbf{J_s}) \cdot \mathbf{dl}$$

เป็นที่ทราบกันดีว่ากระแสยวดยิ่งมีความสัมพันธ์กับความเร็วในตัวนำยวดยิ่ง ดังนี้ $\mathbf{J_s} = n_s e^* \mathbf{v_s}$ ทำให้เราได้ฟลักซ์ซอยด์เป็น

$$\Phi' = \frac{c}{e^*}\oint_C \left(n_s e^{*2}\mathbf{v_s}\Lambda + \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{dl}$$

ให้เราแทน $\Lambda = m^* / n_s e^{*2}$ ฟลักซ์ซอยด์จะกลายเป็น $\Phi' = \frac{c}{e^*}\oint_C \left(m^*\mathbf{v_s} + \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{dl}$ และนำไปเปรียบเทียบกับสมการที่ (1.14) ที่สุดแล้วจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ซอยด์ Φ' กับโมเมนตัม $\mathbf{p_s}$ ตามต้องการ นั่นก็คือ

$$\Phi' = \frac{c}{e^*}\oint_C \mathbf{p_s} \cdot \mathbf{dl} \tag{1.15}$$

จะเห็นได้ว่าฟลักซ์ซอยด์ คือ การอินทิเกรตตลอดเส้นทางปิด C ของโมเมนตัม จากนั้นให้ใช้กฎการควอนไตซ์ของบอร์–ซัมเมอร์เฟล (Bohr–Sommerfeld Quantization Rule) [7]

$$\oint_C \mathbf{p_s} \cdot \mathbf{dl} = nh \tag{1.16}$$

ดังนั้น จากสมการที่ (1.15) เราจะได้ว่า

$$\Phi' = \frac{c}{e^*} nh \tag{1.17}$$

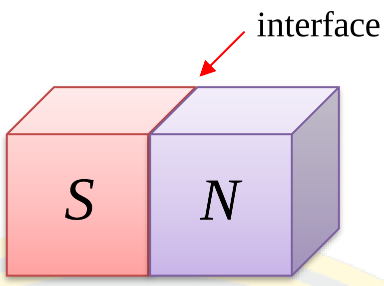
เรารู้ว่า $e^* = 2e$ แล้วจึงจะนิยาม $\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2.07 \times 10^{-7}$ G-cm^2 = 2.07×10^{-15} Wb ที่เรียกว่า ฟลักซ์ซอยด์เชิงควอนตัม (fluxoid quantum)

1.1.4 ปรากฏการณ์แผ่นประกบ (proximity effect)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติพื้นฐานของปรากฏการณ์แผ่นประกบในโครงสร้างต่าง ๆ พอสังเขป ในส่วนแรก คือ ปรากฏการณ์แผ่นประกบของโครงสร้างระหว่างตัวนำยวดยิ่ง (superconductor ; SC) กับโลหะปกติ (normal metal ; NM) และส่วนที่สอง คือ ปรากฏการณ์แผ่นประกบของโครงสร้างระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับโลหะแม่เหล็กเฟร์โร (ferromagnetic metal ; FM)

โครงสร้างตัวนำยวดยิ่งกับโลหะปกติ (Superconductor – Normal metal structures)

หากตัวนำยวดยิ่งถูกสัมผัสกับวัสดุที่ไม่ใช่ตัวมันเองแล้วคุณสมบัติทางกายภาพของวัสดุทั้งสองอาจเปลี่ยนไป ปรากฏการณ์นี้เราเรียกว่า ปรากฏการณ์แผ่นประกบ (proximity effect) ที่ศึกษากันมาเป็นเวลาหลายปี ทั้งการทดลองและทฤษฎีแสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่งจะไม่เปลี่ยนหากนำไปสัมผัสกับวัสดุฉนวน ยกตัวอย่างเช่น ฟิล์มตัวนำยวดยิ่งที่ระเหยไปบนวัสดุจำพวกแก้วแล้วจะมีอุณหภูมิวิกฤต T_c ใกล้เคียงกับค่าเชิงปริมาตร (bulk value) อย่างไรก็ตามคุณสมบัติทางกายภาพของตัวนำยวดยิ่งกับโลหะปกติ (SC-NM) ดังรูปที่ 4 จะมีค่าความนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงได้มากที่บริเวณรอยต่อทั้งสอง (interface)

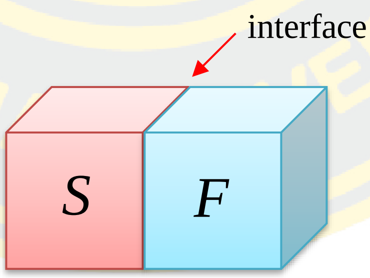


รูปที่ 4 ระบบประกบระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับโลหะปกติ (SC-NM) ชนิดไบเลเยอร์ (bilayer)

การศึกษาผลจากการประกบเริ่มต้นขึ้นในปี ค.ศ.1960 และได้รับการตรวจสอบบทความหลายฉบับที่พบว่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งในระบบ SC-NM ลดลงเมื่อความหนาของชั้นโลหะปกติเพิ่มขึ้น พฤติกรรมนี้สามารถตีความได้ว่าคู่คูเปเปอร์[3] (Cooper pairs) ในตัวนำยวดยิ่งที่แทรกซึมเข้าไปยังบริเวณโลหะปกติจะถูกทำลายและคู่คูเปอร์นี้จะไม่ดึงดูดกันอีกต่อไป

โครงสร้างตัวนำยวดยิ่งกับโลหะแม่เหล็กเฟร์โร (Superconductor – Ferromagnetic metal structures)

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาปรากฏการณ์แผ่นประกบของโครงสร้างระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับโลหะแม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ดังรูปที่ 5

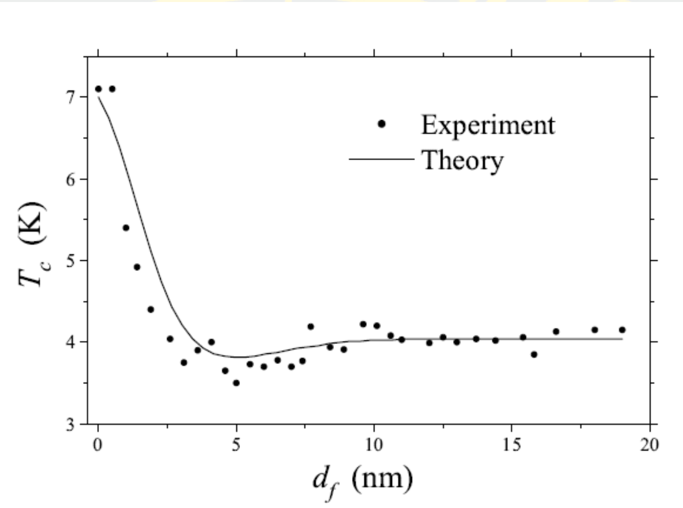


รูปที่ 5 ระบบประกบระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับโลหะแม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ชนิดไบเลเยอร์ (bilayer)

---

[3] คู่คูเปอร์ (Cooper pairs) เป็นกลไกสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพยวดยิ่งขึ้นตามทฤษฎีตัวนำยวดยิ่งแบบจุลภาค (Microscopic theory of superconductor) นั่นก็คือ ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) จะกล่าวในบทที่ 2 ทฤษฎีตัวนำยวดยิ่ง (Theory of superconductor)

เราคิดว่าแม่เหล็กเฟร์โรเป็นโลหะและมีแถบการนำไฟฟ้า นอกจากนี้ยังมีสนามแลกเปลี่ยน (exchange field) ที่เป็นผลมาจากโมเมนต์แม่เหล็กของอิเล็กตรอนที่อยู่ในชั้นแม่เหล็กเฟร์โร ซึ่งสนามแลกเปลี่ยนนี้มีผลอย่างมากต่อการทำลายการเข้าคู่แบบซิงเกลต (singlet pairing) ในตัวนำยวดยิ่ง มันจึงส่งผลให้อุณหภูมิวิกฤตในชั้นแม่เหล็กเฟร์โรลดลงอย่างมาก ดังรูปที่ 6 การศึกษาเชิงทฤษฎีในการคำนวณหาค่าอุณหภูมิวิกฤตสำหรับโครงสร้าง SC-FM ชนิดไบเลเยอร์หรือแม้กระทั่งชนิดมัลติเลเยอร์ ได้รับการคำนวณมาแล้วหลากหลายงาน [8-12] และการศึกษาเชิงการทดลองของอุณหภูมิวิกฤต T_c ก็ได้รับการเผยแพร่จำนวนมากเช่นกัน [13-15]



รูปที่ 6 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง $T_c\left(K\right)$ กับความหนาของชั้นโลหะเฟร์โร $d_f\left(nm\right)$
อ้างอิงกราฟจากงาน [10]

จากรูป (สัญลักษณ์จุด) แสดงถึงผลการทดลอง [16] อุณหภูมิวิกฤตที่วัดได้ของโครงสร้าง SC-FM ชนิดไบเลเยอร์ นั่นก็คือ $Nb-Cu_{0.43}Ni_{0.57}$ โดยชั้นตัวนำยวดยิ่งไนโอเบียมมีความหนา 11 นาโนเมตร ผลการทดลองพบว่า การเพิ่มค่าความหนาในชั้นโลหะเฟร์โรจะเป็นผลให้อุณหภูมิวิกฤตมีค่าลดลง ซึ่งในช่วงความหนาของโลหะเฟร์โรแคบ ๆ อุณหภูมิวิกฤตจะลดลงอย่างมาก ผลการทดลองนี้ได้ผลใกล้เคียงกับงานเชิงทฤษฎี [11] (เส้นทึบ) จะเห็นได้ถึงการลดลงของอุณหภูมิวิกฤตเมื่อความหนาของชั้นโลหะเฟร์โรมีค่าเพิ่มขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อศึกษาความเป็นไปได้ของสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ในปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค โดยคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตของระบบประกบไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โรในโครงสร้างทรงกระบอกร่วมแกนที่มีแม่เหล็กเฟร์โรเป็นแกนกลางและถูกล้อมรอบด้วยตัวนำยวดยิ่งเปลือกบาง

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับในงานวิจัย

พัฒนาความเข้าใจปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์คให้มากยิ่งขึ้นว่าเสถียรภาพของสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์สามารถมีอยู่จริงได้หรือไม่

1.4 ขอบเขตของงานวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเชิงทฤษฎีของระบบแผ่นประกบระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟร์โรในรูปทรงเรขาคณิตแบบทรงกระบอกร่วมแกนที่มีแกนกลางเป็นแม่เหล็กเฟร์โรล้อมรอบด้วยตัวนำยวดยิ่งผนังบางและผิวสัมผัสระหว่างโลหะทั้งสองมีสภาพนำไฟฟ้าที่ดี ทั้งนี้ทรงกระบอกร่วมแกนดังกล่าวถูกประยุกต์ด้วยสนามแม่เหล็กภายนอก (external magnetic field ; $\mathbf{H}$) ที่มีความเข้มคงตัวและมีทิศทางตามแนวแกนทรงกระบอกเพื่อทำให้เกิดฟลักซ์แม่เหล็กผ่านภาคตัดขวางทรงกระบอกซึ่งเรียกว่าฟลักซ์ซอยด์ การแปรผันของอุณหภูมิวิกฤตตามการแปรค่าของฟลักซ์ซอยด์สัมพัทธ์รู้จักกันในชื่อของปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค ซึ่งแสดงให้เห็นว่าฟลักซ์ซอยด์ไม่ถูกบังคับให้เป็นจำนวนเต็มของฟลักซ์เชิงควอนตัมในสถานะตัวนำยวดยิ่งและเลขภาวะไหลวนมีความคล้ายคลึงกับเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุม การมีอยู่ของสนามแลกเปลี่ยนในแกนแม่เหล็กเฟร์โรทำหน้าที่ทำลายคู่อิเล็กตรอนที่จับคู่ในสถานะสปินซิงเกลตโดยหน่วงแอมพริจูดของฟังก์ชันคลื่นคู่อิเล็กตรอนพร้อมกับการยืดคาบการแกว่ง ผลการศึกษาที่ผ่านมาแสดงให้เห็นว่าปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์คสามารถเกิดขึ้นได้ในกรณีของสถานะตัวนำยวดยิ่งเอกพันธุ์ คำถามที่ยังไม่มีการวิเคราะห์คือ สถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์สามารถมีเสถียรภาพในปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์คได้หรือไม่ การสืบสวนเชิงทฤษฎียืนพื้นอยู่บนสมการอูซาเดล ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองพร้อมกับสมการของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในย่านใกล้เคียงอุณหภูมิวิกฤต ผลเฉลยของสมการอูซาเดลในแกนแม่เหล็กเฟร์โรและเปลือกตัวนำยวดยิ่งถูกเชื่อมโยงกันด้วยเงื่อนไขขอบเขตคูพริยานอฟ-ลูคิเซพ เพื่อหาสมการของอุณหภูมิวิกฤต ท้ายที่สุด

จะใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ในปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค

บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่ใช้การอธิบายกลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่งจะแบ่งเป็น 2 ทฤษฎี ได้แก่ ทฤษฎีตัวนำยวดยิ่งแบบจุลภาค (microscopic theory of superconductors) และทฤษฎีตัวนำยวดยิ่งแบบมหภาค (macroscopic theory of superconductors) ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีตัวนำยวดยิ่งแบบจุลภาคที่ได้รับการยอมรับมากที่สุด นั่นก็คือ ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) ซึ่งประสบความสำเร็จในการอธิบายปรากฏการณ์หลายประการ ยกตัวอย่างเช่น การกระโดดของความจุความร้อนจำเพาะ (specific heat jump) จากเฟสตัวนำยวดยิ่งไปสู่เฟสสถานะปกติโดยอาศัยหลักการเรื่องช่องว่างพลังงาน (gap energy) มาช่วยในการอธิบาย ทำให้ตระหนักรู้ถึงสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสภาพยวดยิ่ง ทฤษฎีบีซีเอสเป็นทฤษฎีที่เริ่มต้นพิจารณากลไกขนาดเล็ก นั่นคือ การที่คู่อิเล็กตรอนชนิดคลื่นเอส (s-wave) เกิดอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างกัน โดยมีโฟนอนเป็นตัวกลางในการเข้าคู่ในช่วงเวลาสั้นๆ ด้วยขนาดของแรงที่มีค่ามากกว่าแรงคูลอมบ์มาก ภายใต้เงื่อนไขจำกัดที่ว่า อิเล็กตรอนต้องมีพลังงานในย่านผิวเฟร์มีเท่านั้น การเข้าคู่กันของอิเล็กตรอนแต่ละคู่ที่มีผลรวมของโมเมนตัมและสปินเท่ากับศูนย์ คู่อิเล็กตรอนที่จับคู่แบบนี้ เรียกว่า คู่คูเปอร์ (cooper pairs) เป็นกลไกสำคัญในการอธิบายสมบัติต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม (conventional superconductor) ได้ดีมาก ทฤษฎีบีซีเอสถูกนำเสนอในปี ค.ศ.1957 โดย บาร์ดีน คูเปอร์ และชรีฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper and Schrieffer) [17] ส่วนทฤษฎีตัวนำยวดยิ่งแบบมหภาคที่ได้รับการยอมรับมากที่สุด คือ ทฤษฎีกินส์เบิร์ก-แลนเดา (Ginzburg-Landau theory) จัดเป็นทฤษฎีเชิงปรากฏการณ์ (phenomenological theory) ที่ถูกพัฒนามาจากทฤษฎีการเปลี่ยนเฟสอันดับที่สองของแลนเดา (Landau theory of second order phase) ซึ่งเกิดขึ้นก่อนทฤษฎีบีซีเอสเสียอีก อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีเชิงปรากฏการณ์ไม่ได้มีแค่ของกินส์เบิร์ก-แลนเดา แต่ยังมีทฤษฎีของลอนดอน (London theory) ถูกเสนอขึ้นตั้งแต่ปี ค.ศ.1935 ที่มีจุดมุ่งหมายในการอธิบายปรากฏการณ์ไมสเนอร์ด้วยการสร้างสมการทางพลศาสตร์ไฟฟ้าสองสมการที่บรรยายถึงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสยวดยิ่งกับสนาม ดังสมการที่ (1.1) และ (1.2) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์เฉพาะที่ (local relation) ต่อมาในปี ค.ศ.1953 พิพพาร์ด เริ่มทำการปรับปรุงสมการลอนดอน ที่นำมาซึ่งสมการในรูปแบบความสัมพันธ์ไม่เฉพาะที่ (non-local relation) จนเกิดมาเป็นอีกหนึ่งทฤษฎีเชิงปรากฏการณ์ เรียกว่า ทฤษฎีพิพพาร์ด (Pippard theory)

ในส่วนต่อไปเป็นการบรรยายกลไกสำคัญในการเกิดสภาพยวดยิ่งแบบดั้งเดิมด้วยการใช้ทฤษฎีบีซีเอส เริ่มจากต้องเข้าใจพื้นฐานสำคัญต่อทฤษฎีนี้ นั่นคือ กลไกการเกิดคู่คูเปอร์ จากนั้นจะเข้าสู่ทฤษฎีบีซีเอสเพื่อหาฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ ท้ายที่สุดทำการคำนวณหาค่าพลังงานในสถานะพื้นของสภาพยวดยิ่ง

2.1 คู่คูเปอร์ (Cooper pairs)

พื้นฐานที่สำคัญต่อทฤษฎีบีซีเอส คือ เมื่ออิเล็กตรอนมีอันตรกิริยาดึงดูดกันในสถานะพื้น (ground state) ไม่ว่าอันตรกิริยานี้จะน้อยเพียงใดเป็นผลให้สถานะปกติไม่ใช่สถานะที่มีความเสถียรภาพ (instability) อีกต่อไป โดยในสถานะพื้นของอิเล็กตรอนแก๊สอิสระ คือ สถานะที่มีเวกเตอร์คลื่น $\mathbf{k}$ และมีพลังงาน $\hbar^2k^2/2m$ ที่มีอิเล็กตรอนอยู่ระดับละสองตัว ตั้งแต่ระดับที่มีพลังงานเป็นศูนย์ไปจนถึงระดับเฟร์มี [18] หากทำการพิจารณาอิเล็กตรอนสองตัวที่ตำแหน่ง $\mathbf{r_1}$ และ $\mathbf{r_2}$ โดยอิเล็กตรอนตัวอื่นๆที่เหลือในสถานะพื้น จะกีดกันไม่ให้อิเล็กตรอนทั้งสองอยู่ในระดับพลังงานที่มี $\mathbf{k} < \mathbf{k_F}$ (พลังงานเฟร์มี $E_F = \hbar^2 k_F^2/2m$) ตามหลักการกีดกัน (exclusion principle) ต่อไปทำการกำหนด $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ แทนฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนทั้งสองตัวและพิจารณาเฉพาะกรณีที่จุดศูนย์กลางมวลของอิเล็กตรอนทั้งสองนี้อยู่นิ่ง จึงเขียนฟังก์ชันคลื่นในรูปอนุกรมคลื่นระนาบได้เป็น

$$\psi(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) = \sum_k g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \tag{2.1}$$

โดยที่ $g(\mathbf{k})$ คือแอมพลิจูดความน่าจะเป็นที่จะพบอิเล็กตรอนหนึ่งตัวที่สถานะของโมเมนตัม $\hbar\mathbf{k}$ และพบอิเล็กตรอนอีกตัวที่สถานะ $-\hbar\mathbf{k}$ และเนื่องจากสถานะ $\mathbf{k} < \mathbf{k_F}$ จะต้องไม่พบอิเล็กตรอนทั้งสอง ตามเงื่อนไขการกีดกันของเพาลี (Pauli exclusion) จะได้ว่า

$$g(\mathbf{k}) = 0 \qquad ; \quad \mathbf{k} < \mathbf{k_F} \tag{2.2}$$

สมการชเรอดิงเงอร์ของอิเล็กตรอนทั้งสอง คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla_1^2 + \nabla_2^2\right)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2})\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(E + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m}\right)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r_2}) \tag{2.3}$$

ในที่นี้ E คือ พลังงานของคู่อิเล็กตรอนเทียบกับสถานะพลังงานที่ระดับเฟร์มีของคู่อิเล็กตรอนและ $V(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2})$ คือ พลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนสองตัว การแก้สมการชเรอดิงเงอร์จะ

เริ่มจากนำสมการที่ (2.1) แทนลงในสมการที่ (2.3) เราจะได้สมการสำหรับแอมพลิจูดความน่าจะเป็น $g(\mathbf{k})$ คือ

$$-\frac{\hbar^2 k^2}{m} g(\mathbf{k}) + \sum_{k'} g(\mathbf{k}') V_{kk'} = (E + 2E_F) g(\mathbf{k}) \tag{2.4}$$

เมื่อ $V_{kk'} = \frac{1}{L^3}\int V(\vec{r}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \mathbf{dr}$ เป็นองค์ประกอบของเมทริกซ์ (matrix element) ของอันตร-กิริยาระหว่างสถานะ $\mathbf{k}$ และ $\mathbf{k}'$ และ L^3 คือ ปริมาตรของระบบ และในสมการที่ (2.4) หากรวมเงื่อนไขการกีดกันของเพาลี (Pauli exclusion) จากสมการ (2.2) ในบางครั้งอาจเรียกว่า สมการเบทธ์-โกลสโตน (Bethe – Gold stone equation) สำหรับปัญหาคู่อิเล็กตรอน ในกรณีที่ $E > 0$ จะเกิดสเปกตรัมที่ต่อเนื่อง ที่อธิบายการชนกันของอิเล็กตรอนทั้งสองจากสถานะ $(\mathbf{k}, \text{-}\mathbf{k})$ ไปสู่สถานะ $(\mathbf{k}', \text{-}\mathbf{k}')$ ด้วยค่าพลังงานเท่ากัน แต่ถ้าอันตรกิริยาเป็นแบบดึงดูด สถานะที่เกิดอาจเป็นสถานะที่ถูกกัก (bound states) ที่มี $E < 2E_F$

พิจารณาอันตรกิริยาอย่างง่าย

$$V_{kk'} = \begin{cases} -\dfrac{V}{L^3} \;; & \left|\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}\right| < E_F + \hbar\omega_D \\ & \left|\dfrac{\hbar^2 k'^2}{2m}\right| < E_F + \hbar\omega_D \\ 0 \;; & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.5}$$

อันตรกิริยาแบบดึงดูดที่มีค่าคงที่ในช่วงพลังงาน $\hbar\omega_D$ เรียกว่า พลังงานเดอบาย (Debye energy) ซึ่งพลังงานเดอบายจะอยู่เหนือระดับเฟร์มี จากสมการ (2.4) จึงกลายเป็น

$$\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{m} + E + 2E_F\right) g(\mathbf{k}) = C \tag{2.6}$$

เมื่อ C คือค่าคงที่ที่ขึ้นกับ $\mathbf{k}$

$$C = -\frac{V}{L^3}\sum_{k'} g(\mathbf{k}') \tag{2.7}$$

ในช่วงพลังงาน $E_F < \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D$ และหากเปรียบเทียบ (2.6) และ (2.7) จะได้

$$1 = \frac{V}{L^3} \sum_{k'} \frac{1}{-E + \frac{\hbar^2 k'^2}{m} - 2E_F} \tag{2.8}$$

เพื่อความสะดวกจึงกำหนดพจน์พลังงานเป็น $\xi' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - E_F$ แล้วเขียนพจน์ผลรวมยอด (summation ; $\sum$) ให้กลายเป็นอินทิเกรต (integration ; $\int$) ของพลังงานพร้อมกับแทรกความหนาแน่นของสถานะเข้ามาจะได้

$$1 = V \int_0^{\hbar\omega_D} N(\xi') \frac{1}{2\xi' - E} d\xi' \tag{2.9}$$

โดยที่ความหนาแน่นของสถานะ (ในช่วงพลังงานที่อินทิเกรตเท่านั้น)

$$N(\xi') = (2\pi)^{-3} 4\pi k'^2 \frac{dk'}{d\xi'} \tag{2.10}$$

ถ้าเราสมมติ $\hbar\omega_D \ll E_F$ และที่ระดับเฟร์มีความหนาแน่นของสถานะมีค่าคงที่ $N(\xi') = N(0)$ จากสมการ (2.9)

$$1 = \frac{1}{2} N(0) \ln\left(\frac{E - 2\hbar\omega_D}{E}\right) \tag{2.11}$$

และที่ขีดจำกัดอันตรกิริยามีค่าอ่อน (weak coupling limit) $N(0)V \ll 1$ จากสมการ (2.11) จะได้

$$E = -2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)V} \tag{2.12}$$

ดังนั้น อิเล็กตรอนทั้งสองตัวสามารถอยู่ในสถานะที่ถูกกัก (bound states) ได้เนื่องจากพลังงาน $E < 0$ และไม่ว่าอันตรกิริยาจะอ่อนแค่ไหนก็ตามความไม่เสถียรภาพยังคงอยู่ นี่คือสิ่งที่แปลกประหลาดมาก ๆ ในปัญหาของอนุภาคสองตัวและหากมีเพียงอนุภาคสองตัวจับคู่กันโดยอาศัยผลจากอันตรกิริยาแบบดึงดูด อนุภาคเหล่านี้จะไม่สามารถอยู่ในสถานะที่ถูกกักได้ นอกเสียจากอันตรกิริยานี้จะเกินเกณฑ์ที่กำหนดไว้ นอกจากนี้เรายังทำนายได้ว่าอิเล็กตรอนจะจับกลุ่มเป็นคู่แล้วจะคายพลังงานออกมา ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีความเสถียรภาพในสถานะปกติ

2.2 ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory)

โลหะมีอิเล็กตรอนอิสระเป็นอนุภาคตัวนำ สมบัติต่างๆของโลหะขึ้นกับพฤติกรรมของอิเล็กตรอนอิสระเหล่านี้และในตัวนำยวดยิ่งอนุภาคตัวนำก็คือ คู่คูเปอร์ ดังนั้นสมบัติต่างๆของตัวนำยวดยิ่งจะขึ้นกับพฤติกรรมของคู่คูเปอร์ ทฤษฎีบีซีเอสเริ่มคำนวณอันตรกิริยาของการเกิดคู่คูเปอร์และจะถูกอธิบายด้วยวิธีควอนไทต์ลำดับสอง (second quantization) [19] ในการพิจารณาเริ่มจากฮามิลโทเนียนของตัวนำยวดยิ่ง

$$\hat{H} = H_0 + H_{\text{int}} \tag{2.13}$$

เทอมแรก $H_0 = \sum_{\bar{k},\alpha} \xi_k a^{\dagger}_{\bar{k}\alpha} a_{\bar{k}\alpha}$ แสดงถึงพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนเทียบกับพลังงานเฟร์มี

$$\xi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F \tag{2.14}$$

เทอมที่สอง $H_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} V_{\mathbf{k}} a^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} a^{\dagger}_{-\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\alpha}$ แสดงถึงอันตรกิริยาแบบดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนที่อยู่ในบริเวณผิวเฟร์มี อิเล็กตรอนทั้งสองตัวจะต้องมีโมเมนตัมและสปินตรงข้ามกัน โดยที่ $a^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}$ คือ ตัวดำเนินการสร้าง (creation operator) และ $a_{\mathbf{k}\alpha}$ ตัวดำเนินการทำลาย (destruction operator) ของอิเล็กตรอนที่กำกับด้วยเวกเตอร์คลื่น $\mathbf{k}$ และสปิน α ตามลำดับ

2.2.1 ฟังก์ชันคลื่นบีซีเอส (BCS Wave function)

จากหัวข้อที่แล้วเราได้ทราบแล้วว่าอิเล็กตรอนสองตัวมีอันตรกิริยาดึงดูดกันโดยอาศัยโฟนอนเป็นตัวกลางในเงื่อนไขที่เหมาะสม กล่าวคืออิเล็กตรอนต้องมีพลังงานใกล้ผิวเฟร์มีเท่านั้นและคู่อิเล็กตรอนจะมีลักษณะเป็นกึ่งอนุภาค (quasiparticle) ให้หัวข้อนี้จะบรรยายฟังก์ชันสถานะพื้นของตัวนำยวดยิ่งของอิเล็กตรอนจำนวน N ตัว [18] ดังนี้

$$\phi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_\mathbf{N}) = \phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\phi(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)\ldots\phi(\mathbf{r}_{\mathbf{N-1}} - \mathbf{r}_\mathbf{N}) \tag{2.15}$$

การเขียนฟังก์ชันคลื่นลักษณะนี้ เรียกว่า ฟังก์ชันคลื่นทดสอบ (trial wave function) แต่ฟังก์ชันคลื่นในสมการที่ (2.15) ยังไม่สมบูรณ์เนื่องจากอิเล็กตรอนที่เข้าคู่กันจะต้องมีสปินตรงข้ามกัน จึงต้องนำส่วนสปินเข้ามาเขียนด้วยและเช่นเดิมเราจะเขียนฟังก์ชัน ϕ ในรูปของอนุกรมคลื่นระนาบทำนองเดียวกับสมการ (2.1) จะได้

$$\phi_N = \sum_{\mathbf{k}_1}\dots\sum_{\mathbf{k}_{N/2}} g_{\mathbf{k}_1}\dots g_{\mathbf{k}_{N/2}} A e^{i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\dots e^{i\mathbf{k}_{N/2}\cdot(\mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N)}(1\uparrow)(2\downarrow)\dots(N-1\uparrow)(N\downarrow) \tag{2.16}$$

เมื่อ $Ae^{i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\dots e^{i\mathbf{k}_{N/2}\cdot(\mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N)}(1\uparrow)(2\downarrow)\dots(N-1\uparrow)(N\downarrow)$ บอกถึงระบบที่มีอิเล็กตรอนตัวที่หนึ่งอยู่ในสถานะ $\mathbf{k}_1\uparrow$ ตัวที่สองอยู่ในสถานะ $-\mathbf{k}_1\downarrow$ และอิเล็กตรอนตัวถัดไปอยู่ในสถานะ $\mathbf{k}_2\uparrow$ ไปเรื่อยๆ ในที่นี้ A เป็นสัญลักษณ์ที่บ่งบอกถึงระบบเป็นลักษณะไม่สมมาตร (antisymmetric) ซึ่งสามารถเขียนเป็นดีเทอมิแนนท์สเลเตอร์ (Slater determinant) ของสถานะต่างๆ ได้ว่า

$$(\mathbf{k}_1\uparrow)(-\mathbf{k}_1\downarrow)(\mathbf{k}_2\uparrow)(-\mathbf{k}_2\downarrow)\dots(\mathbf{k}_{N/2}\uparrow)(-\mathbf{k}_{N/2}\downarrow)$$

เพื่อความสะดวกดีเทอมิแนนท์สเลเตอร์จะถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ของวิกเนอร์-จอร์แดน (Wigner-Jordan) กล่าวคือ จะเขียนรูปตัวดำเนินการสร้างและทำลาย ดังนี้

$$a^\dagger_{\vec{k}_1\uparrow}a^\dagger_{-\vec{k}_1\downarrow}\dots a^\dagger_{\vec{k}_{N/2}\uparrow}a^\dagger_{-\vec{k}_{N/2}\downarrow}|\phi_0\rangle \tag{2.17}$$

เมื่อ $a^\dagger_{\vec{k}\alpha}$ คือ ตัวดำเนินการสร้างอิเล็กตรอนในสถานะ $\mathbf{k}\alpha$ เมื่อดำเนินการบนสถานะสุญญากาศ ϕ_0 (สถานะสุญญากาศ คือ สถานะที่ไม่มีอิเล็กตรอนอยู่) และ $a_{\mathbf{k}\alpha}$ คือ ตัวดำเนินการทำลายสถานะ $\mathbf{k}\alpha$ กล่าวคือ $a_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle = 0$ ดังนั้น อนุกรมของคลื่นระนาบตาม (2.16) จึงสามารถเขียนในรูปของวิกเนอร์-จอร์แดน ได้เป็น

$$\phi_N = \sum_{\mathbf{k}_1}\dots\sum_{\mathbf{k}_{N/2}} g_{\mathbf{k}_1}\dots g_{\mathbf{k}_{N/2}} a^\dagger_{\mathbf{k}_1\uparrow}a^\dagger_{-\mathbf{k}_1\downarrow}\dots a^\dagger_{\mathbf{k}_{N/2}\uparrow}a^\dagger_{-\mathbf{k}_{N/2}\downarrow}|\phi_0\rangle \tag{2.18}$$

กำหนดให้

$$\tilde{\phi} = C\prod_k \left(1 + g_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}a^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow}\right)|\phi_0\rangle \tag{2.19}$$

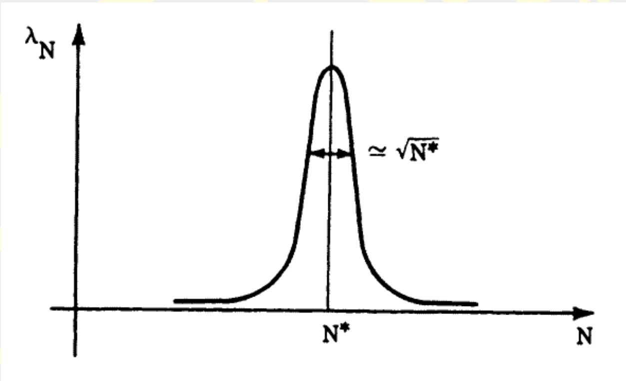
เมื่อ C เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการนอร์ม (normalization) และ $\prod_k$ เป็นผลคูณทุกสถานะ และหากทำการใส่ค่า C เข้าไปในสมการ (2.19) แล้วจะเขียนใหม่ได้ว่า

$$\tilde{\phi} = \prod_k \left(u_k + v_k a^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}a^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow}\right)|\phi_0\rangle \tag{2.20}$$

โดยที่ $|u_k|^2+|v_k|^2=1$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขนอร์ม (normalized) และ $\frac{v_k}{u_k}=g_k$ และในกรณีที่ N มีค่าใหญ่มากๆ เราสามารถเขียน $\tilde{\phi}$ ในรูป

$$\tilde{\phi}=\sum_N \lambda_N \phi_N \tag{2.21}$$

กำหนดให้ λ_N คือ ความน่าจะเป็นในการหาอนุภาค N ตัว โดยที่ $\sum_N |\lambda_N|^2=1$ และในกรณีที่ N มีค่าใหญ่มากๆ $|\lambda_N|^2$ จะขึ้นอยู่กับ N ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 แอมพลิจูดความน่าจะเป็น λ_N ในการพบอนุภาค N ตัว ของฟังก์ชันคลื่น BCS อ้างอิงกราฟจากหน้าที่ 108 ใน [18]

จากกราฟเราสามารถคำนวณหาค่า N ที่ $|\lambda_N|^2$ มีค่าสูงที่สุด นั่นคือ

$$N^*=\langle N\rangle=\sum_k 2|v_k|^2=\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\int \mathbf{dk}\,2v_k^2 \tag{2.22}$$

โดยที่ Ω คือ ปริมาตรของระบบและในทำนองเดียวกันเราสามารถหาความกว้างของกราฟ $|\lambda_N|^2$ นั่นก็คือ

$$\langle N^2\rangle-\langle N\rangle^2=\sum_k 4|u_k|^2|v_k|^2=\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\int \mathbf{dk}\,4|u_k|^2|v_k|^2 \tag{2.23}$$

เนื่องจาก $\sqrt{N^*}$ มีค่ามากกว่า 1 มาก ดังนั้น $|\lambda_N|^2$ มีเปลี่ยนแปลงน้อยมาก เมื่อ N มีค่าต่างจาก $\langle N \rangle$ เพียง 1 หรือ 2 เท่านั้น กล่าวคือ $\lambda_{N+p} \simeq \lambda_N$ เมื่อ $p \ll \sqrt{N^*}$ ถัดมาคำนวณหาค่าเฉลี่ยของตัวดำเนินการ F จาก $\tilde{\phi}$ ซึ่งถ้า F อนุรักษ์จำนวนอนุภาคแล้ว

$$\langle \tilde{\phi} | F | \tilde{\phi} \rangle = \sum_{N,N'} \lambda_{N^*} \lambda_N \langle \phi_N | F | \phi_{N'} \rangle \tag{2.24}$$

เนื่องจาก $\langle \phi_N | F | \phi_N \rangle$ เป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงอย่างช้ามากและจาก $\sum_N |\lambda_N|^2 = 1$ ทำให้ได้ว่า

$$\langle \tilde{\phi} | F | \tilde{\phi} \rangle = \langle \phi_{N^*} | F | \phi_{N^*} \rangle \tag{2.25}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า F กระทำต่อ ϕ_N แล้วทำให้เกิดสถานะที่มีอนุภาค $N+p$ ตัว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi} | F | \tilde{\phi} \rangle &= \sum_N \lambda_{N^*+p} \lambda_N \langle \phi_{N+p} | F | \phi_N \rangle \\ &= \sum_N |\lambda_N|^2 \langle \phi_{N+p} | F | \phi_N \rangle \\ &= \langle \phi_{N^*+p} | F | \phi_{N^*} \rangle \end{aligned} \tag{2.26}$$

สิ่งนี้หมายความว่าไม่ว่า F จะเป็นเช่นไร เราสามารถคำนวณหาค่าเฉลี่ยได้ โดยฟังก์ชัน $\tilde{\phi}$ จะให้ข้อมูลเหมือนกับ ϕ_N

2.2.2 การคำนวณค่าพลังงานสถานะพื้นของตัวนำยวดยิ่ง

กำหนดให้ H คือ ฮาร์มิลโทเนียนของระบบที่อิเล็กตรอนมีอัตรกิริยาระหว่างกัน เนื่องจากฟังก์ชันคลื่น $\tilde{\phi}$ มีค่าจำนวนอนุภาคไม่คงตัวจึงใช้หลักการแปรผัน (variational principle) มาใช้ในการหาพลังงาน เราต้องลดขนาด (minimize) $\langle \tilde{\phi} | H | \tilde{\phi} \rangle - E_F \langle \tilde{\phi} | N | \tilde{\phi} \rangle$ เมื่อ N คือจำนวนอนุภาค และ E_F เป็นตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange multiplier) ที่เรียกว่า ระดับเฟร์มี (Fermi level) ประกอบด้วยสองเทอม คือ พลังงานจลน์

$$H_0 = \sum_{\vec{k},\alpha} \xi_k a^\dagger_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha} \tag{2.27}$$

เมื่อ $\xi_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F$ และพลังงานศักย์ H_{int} (พลังงานศักย์ในที่นี้ คือ พลังงานศักย์ที่บรรยายพฤติกรรมการกระเจิงของอิเล็กตรอนทั้งสองตัวจากสถานะ $(\mathbf{k}\alpha)(\mathbf{k}'\beta)$ไปยัง$(\mathbf{k}+\mathbf{q},\alpha)(\mathbf{k}'-\mathbf{q},\beta)$) เขียนได้เป็น

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},\\ \alpha,\beta}} V\left(\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'+\mathbf{q}\middle|\mathbf{k},\mathbf{k}'\right) a^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\alpha} a^{\dagger}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\beta} a_{\mathbf{k}'\beta} a_{\mathbf{k}\alpha} \qquad (2.28)$$

องค์ประกอบเมทริกซ์ของอันตรกิริยานี้จะไม่ขึ้นกับสปิน กล่าวคือ อันตรกิริยาจะอนุรักษ์โมเมนตัมและสปิน ในสถานะ $\tilde{\phi}$ ความน่าจะเป็นในการหาอิเล็กตรอนที่อยู่ในสถานะ $\mathbf{k}$ คือ$|v_k|^2$ ดังนั้น พลังงานจลน์จึงกลายเป็น

$$\left\langle \tilde{\phi} \middle| H_0 \middle| \tilde{\phi} \right\rangle = \sum_k |v_k|^2 \xi_k \qquad (2.29)$$

สำหรับพลังงานศักย์ทำให้อิเล็กตรอนเกิดการกระเจิงสามารถเกิดขึ้น 3 แบบ ได้แก่

1. การกระเจิงที่ไม่เปลี่ยนสถานะ $V\left(\mathbf{k}\mathbf{k}'\middle|\mathbf{k}\mathbf{k}'\right)$

2. การกระเจิงที่แลกเปลี่ยนสถานะกัน $V\left(\mathbf{k}\mathbf{k}'\middle|\mathbf{k}'\mathbf{k}\right)$

3. การกระเจิงที่มีการเปลี่ยนของสถานะคู่ $V\left(\ell,-\ell\middle|\mathbf{k},-\mathbf{k}'\right) = V_{\mathbf{k}\ell}$ กล่าวคือ เป็นการเปลี่ยนสถานะจาก $\left(\mathbf{k}\uparrow,-\mathbf{k}\downarrow\right)$ ไปเป็น $\left(\ell\uparrow,-\ell\downarrow\right)$

อันตรกิริยาที่ทำให้เกิดการกระเจิงในสองแบบแรกมีปรากฏในระบบโลหะปกติซึ่งสามารถเขียนรวมในเทอมของพลังงานจลน์ได้ ดังนั้น เมื่อเราพิจารณากรณีของอิเล็กตรอนในตัวนำยวดยิ่งจึงพิจารณาเฉพาะอันตรกิริยาในแบบที่สามเท่านั้น ฮาร์มิลโทเนียลจึงถูกเขียนเป็น

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathbf{k},\ell,\\ \alpha,\beta}} V_{\mathbf{k}\ell} a^{\dagger}_{\ell,\alpha} a^{\dagger}_{-\ell,\beta} a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\beta} \qquad (2.30)$$

ทำการเฉลี่ยจะได้ $\left\langle \tilde{\phi} \middle| H_{\text{int}} \middle| \tilde{\phi} \right\rangle = \sum_{\substack{\mathbf{k},\ell,\\ \mathbf{k}\neq\ell}} V_{\mathbf{k}\ell} v^*_{\ell} u_{\ell} v_{\mathbf{k}} u^*_{\mathbf{k}}$

ดังนั้น

$$\left\langle \tilde{\phi} \middle| H - E_F N \middle| \tilde{\phi} \right\rangle = 2\sum_{\mathbf{k}} |v_k|^2 \xi_k + \sum_{\substack{\mathbf{k},\ell, \\ \mathbf{k}\neq\ell}} V_{\mathbf{k}\ell} v_\ell^* u_\ell v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^* \tag{2.31}$$

ใช้เงื่อนไขนอร์มที่ว่า $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ จึงสามารถเขียน $|u_k| = \sin\theta_k$ และ $|v_k| = \cos\theta_k$ และเขียนใหม่

$$\left\langle \tilde{\phi} \middle| H - E_F N \middle| \tilde{\phi} \right\rangle = 2\sum_{\mathbf{k}} \cos^2\theta_k \xi_k + \sum_{\mathbf{k},\ell} V_{\mathbf{k}\ell} \sin 2\theta_k \sin 2\theta_\ell \tag{2.32}$$

จึงได้สมการสำหรับการลดขนาด (minimize) เป็น

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta_k} \left\langle \tilde{\phi} \middle| H - E_F N \middle| \tilde{\phi} \right\rangle = -2\xi_k \sin 2\theta_k + \sum_{\ell} V_{\mathbf{k}\ell} \cos 2\theta_k \sin 2\theta_\ell \tag{2.33}$$

หรือ

$$\xi_k \tan 2\theta_k = \frac{1}{2}\sum_{\ell} V_{\mathbf{k}\ell} \sin 2\theta_l = \sum_{\ell} V_{\mathbf{k}\ell} \sin\theta_\ell \cos\theta_\ell \tag{2.34}$$

ทำการกำหนด

$$\Delta_k = -\sum_{\ell} V_{\mathbf{k}\ell} u_\ell v_\ell \text{ และ } \varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \tag{2.35}$$

จึงเขียน (2.34) ใหม่ได้ว่า $\tan 2\theta_k = -\dfrac{\Delta_k}{\xi_k}$

$$\tan 2\theta_k = -\frac{\Delta_k}{\xi_k} \text{ และ } 2u_k v_k = \sin 2\theta_k = -\frac{\Delta_k}{\xi_k} \text{ และ } -|u_k|^2 + |v_k|^2 = \cos 2\theta_k = -\frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \tag{2.36}$$

เมื่อแทนค่าจากสมการที่ (2.36) ลงใน สมการที่ (2.35) จะพบว่า

$$\Delta_k = -\sum_{l} V_{\mathbf{k}\ell} \frac{\Delta_l}{2\sqrt{\xi_l^2 + \Delta_l^2}} \tag{2.37}$$

สังเกตในสมการที่ (2.37) โดยมีผลเฉลยที่หากได้จากกรณีที่ $\Delta_k = 0$ จากสมการ (2.36) แล้วเราจะได้ $-|u_k|^2 + |v_k|^2 = \mp 1$ ซึ่งจะสอดคล้องกับ

$$v_k = \begin{cases} 1 & ; \xi_k < 0 \\ 0 & ; \xi_k > 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

และมันคือผลเฉลยที่เป็นคำตอบของระบบอิเล็กตรอนในโลหะปกติ (trivial solution) ซึ่งจะมีฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$\tilde{\phi} = \prod_{k<k_F} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \left|\phi_0\right\rangle \tag{2.39}$$

เรียกว่า ฟังก์ชันคลื่นของบีซีเอสในโลหะปกติ (BCS wave function of normal metal) ถัดมาจะพิจารณา nontrivial solution โดยเราจะเลือกให้อันตกิริยา $V_{\mathbf{k}\ell}$ มีค่าเป็น

$$V_{\mathbf{k}\ell} = \begin{cases} -V \ ; \left|\xi_k\right| \ \ and \ \ \left|\xi_\ell\right| \le \hbar\omega_D \\ 0 \ ; \left|\xi_k\right| \ge \hbar\omega_D \ or \ \left|\xi_\ell\right| \ge \hbar\omega \end{cases} \tag{2.40}$$

เรียกรูปแบบอย่างง่ายนี้ว่า อันตรกิริยาของบีซีเอส (interaction of BCS) และจะได้

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta \ ; \left|\xi_k\right| < \hbar\omega_D \\ 0 \ ; \left|\xi_k\right| > \hbar\omega_D \end{cases} \tag{2.41}$$

จากสมการที่ (2.37) เปลี่ยนเครื่องหมายผลรวมยอด (summation ; $\sum$) ให้เป็นเครื่องหมายการอินทิเกรต (integration ; $\int$)

$$\begin{gathered} \Delta = N(0)V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \Delta \frac{d\xi}{2\sqrt{\Delta^2 + \xi^2}} \\ \frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\Delta^2+\xi^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta}\right) \\ \Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh\left(\frac{1}{N(0)V}\right)} \end{gathered} \tag{2.42}$$

พิจารณาในกรณีอันตรกิริยาแบบอ่อน (weak coupling) หรือ $N(0)V \ll 1$ และใช้การประมาณ $\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \simeq \ln x$ เมื่อ $x \gg 1$ จึงได้

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V} \tag{2.43}$$

คือ ช่องว่างพลังงาน (energy gap) นั่นเอง ซึ่งจะเท่ากับพลังงานของการจับคู่ของอิเล็กตรอนดังสมการที่ (2.12) แต่ถ้าเราพิจารณาในกรณีที่อุณหภูมิมีค่ามากกว่าศูนย์เคลวิน จะได้ว่า

$$\Delta_k = -\sum_{\ell} V_{\mathbf{k}\ell} \frac{\Delta_\ell}{2\varepsilon_\ell} \tanh\left(\frac{\beta\varepsilon_\ell}{2}\right) \tag{2.44}$$

เมื่อ $\beta = \frac{1}{kT}$ และตามการประมาณของบีซีเอส $V_{\mathbf{k}\ell} = -V$ และ $\Delta_k = \Delta_\ell = \Delta$ จะได้

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\sum_k \frac{\tanh(\beta\varepsilon_k/2)}{\varepsilon_k} \tag{2.45}$$

และจะนำมาสู่

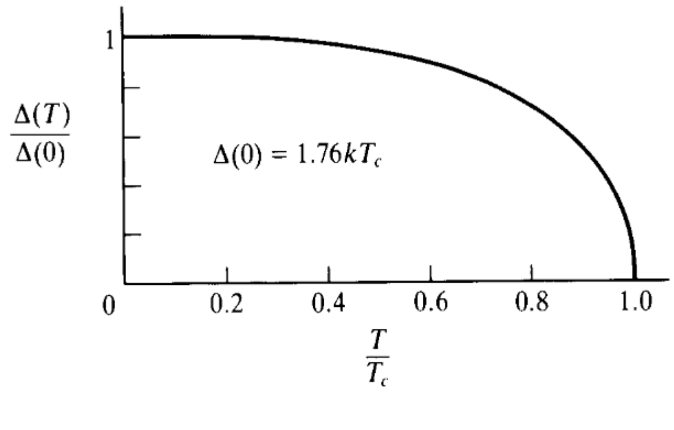
$$\frac{1}{\beta_c} = kT_c = 1.13\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V} \tag{2.46}$$

ทำการเปรียบเทียบสมการ (2.43) กับ สมการ (2.46) เพื่อกำจัด $-1/N(0)V$ จะได้

$$\frac{\Delta(0)}{kT_c} = \frac{2}{1.13} = 1.76 \tag{2.47}$$

ท้ายที่สุดจะได้สมการคำนวณสำหรับอุณหภูมิใกล้ค่าวิกฤต ดังรูปที่ 8 คือ

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \simeq 1.74\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \tag{2.48}$$



รูปที่ 8 แสดงถึงช่องว่างพลังงาน $\Delta(T)$ ตามการแปรค่าอุณหภูมิ ฉบับทฤษฎี BCS ในขีดจำกัดอันตรกิริยาแบบอ่อน (weak coupling limit) อ้างอิงกราฟจากหน้าที่ 64 ใน [20]

บทที่ 3 เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากที่ได้กล่าวไปแล้วในวัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ที่ว่าจะศึกษาความไม่เสถียรภาพของสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ในโครงสร้างไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ชนิดทรงกระบอก เป็นการศึกษาในกรณีตัวนำยวดยิ่งประเภทโลหะที่มีสารเจือผสม (impurity) หรือเรียกว่า อัลลอยด์ (alloy) ที่ทำให้อิเล็กตรอนกระเจิงเนื่องจากอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนในสารเจือ หรือแม้กรณีตัวนำยวดยิ่งถูกประยุกต์เข้ากับสนามแม่เหล็ก ผลของสารเจือหรือผลของสนามแม่เหล็กล้วนแล้วแต่เป็นตัวอย่างของตัวนำยวดยิ่งที่ไม่เอกพันธุ์ หรือตัวนำยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิม (unconventional superconductors) ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นและไม่สามารถใช้ทฤษฎีบีซีเอสวิเคราะห์ได้ เพื่อคลี่คลายปัญหาของตัวนำยวดยิ่งที่ไม่เอกพันธุ์ เหล่านักฟิสิกส์ยุคหลังบีซีเอส จึงนำทฤษฎีจุลภาคของบีซีเอสมาพัฒนา หนึ่งในทฤษฎีที่ได้รับการพัฒนามาจากทฤษฎีบีซีเอส คือ ทฤษฎีเชิงกึ่งแบบฉบับ (quasiclassical theory) ดังนั้น จุดประสงค์ของบทนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีที่รองรับลักษณะตัวนำยวดยิ่งที่ไม่เอกพันธุ์เป็นอย่างดี ซึ่งจะเป็นที่มาที่นำไปสู่สมการการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในตัวนำยวดยิ่งประเภทโลหะที่มีสารเจือผสม ยิ่งไปกว่านั้น จะวิจารณ์วารสารที่เกี่ยวข้องกับหัวเรื่องของวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ให้ผู้อ่านได้ตระหนักถึง หลักการวิเคราะห์การแก้สมการทางคณิตศาสตร์และพฤติกรรมอุณหภูมิวิกฤตที่เกิดในสถานะต่างๆ เพื่อความสะดวกผู้วิจัยแบ่งส่วนบรรยายออกเป็น 3 ส่วน ได้แก่

- เครื่องมือเชิงทฤษฎี (Theoretical tools)
- ปรากฏการณ์แผ่นประกบตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ชนิดไบเลเยอร์ (bilayer)
- ปรากฏการณ์แผ่นประกบของตัวนำยวดยิ่ง - โลหะเฟร์โร SC-FM ชนิดทรงกระบอก (proximity effect of SC-FM cylinder)
    - พฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤตในระบบ SC-FM และความไม่เสถียรภาพของสถานะวอร์เทค
    - การกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤตในระบบไฮบริดจ์ SC-FM ผ่านปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค
    - พฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤตในระบบ SC-FM และความไม่เสถียรภาพของสถานะ FFLO

3.1 เครื่องมือเชิงทฤษฎี (Theoretical tools)

การศึกษากรณีตัวนำยวดยิ่งประเภทโลหะที่มีสารเจือผสม หรือระบบแผ่นประกบโครงสร้างตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ทฤษฎีที่อธิบายระบบแผ่นประกบได้ดี แยกดำเนินการ 2 แบบ ได้แก่ ดำเนินการเชิงจุลภาค (microscopic treatments) และดำเนินการเชิงกึ่งแบบฉบับ (quasiclassical treatments) การดำเนินการเหล่านี้ถูกพัฒนามาจากทฤษฎีจุลภาคของบีซีเอส ทั้งในเชิงจุลภาคและในเชิงกึ่งแบบฉบับ ล้วนแล้วแต่ใช้วิธีฟังก์ชันคลื่น (wave function methods) และวิธีฟังก์ชันกรีน (Green function methods) ดังนั้น ทฤษฎีสำหรับตัวนำยวดยิ่งที่ไม่เอกพันธุ์ จำแนกได้ทั้งหมด 4 ประเภท ดังแสดงในตารางที่ 1 อย่างไรก็ตาม วิธีของฟังก์ชันกรีนตั้งอยู่บนรากฐานของการกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion) ของระบบฮาร์มิลโทเนียนหลายอนุภาค (many body hamiltonian) ในขณะที่วิธีฟังก์ชันคลื่นใช้การได้ดีในระบบฮาร์มิลโทเนียนในสนามเฉลี่ย (mean-field hamiltonian)

กลไกและปัญหาของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือผสม ทฤษฎีเชิงกึ่งแบบฉบับจะให้คำตอบตรงไปตรงมา เหตุผลคือ ทฤษฎีเชิงกึ่งแบบฉบับเป็นทฤษฎีที่จำแนกตามลักษณะความบริสุทธิ์ของชิ้นงาน จึงแยกออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ ตัวนำยวดยิ่งประเภทบริสุทธิ์ (clean superconductor) และตัวนำยวดยิ่งประเภทมีสารเจือ (dirty superconductor) โดยพฤติกรรมปริมาณทางกายภาพของตัวนำยวดยิ่งทั้งสองประเภทนี้ต่างกันอย่างสิ้นเชิง ยกตัวอย่างเช่น ตัวนำยวดยิ่งประเภทบริสุทธิ์จะมีวิถีเสรีเฉลี่ย (mean-free paht) มากกว่าความยาวอาพันธ์ (coherence lenght) มาก ๆ กลับกันประเภทมีสารเจือ วิถีเสรีเฉลี่ยมีค่าน้อยมาก ๆ เมื่อเทียบกับความยาวอาพันธ์ แม้กระทั่งในเรื่องของไอโซทรอปิก[4] (isotropic) ก็เช่นกัน กล่าวคือ ทฤษฎีเชิงกึ่งแบบฉบับในเงื่อนไขมีสารเจือ (dirty limit qusiclassical theory) จะมีสมการการเคลื่อนที่ในรูปที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง สมการการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้มีชื่อเรียกว่า สมการการแพร่แบบอูซาเดล (Usadel’s diffusionlike equation) ที่ถูกพัฒนามาจากฟังก์ชันกรีนที่มีต้นกำเนิดมาจากสมการกอร์คอฟ

เดิมทีแล้วการใช้ฟังก์ชันกรีนของกอร์คอฟ (Gorkov’s Green function) [21] เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของคู่คูเปอร์นั้น พบว่ามีความซับซ้อนเนื่องจากจำนวนตัวแปรที่มาก จนกระทั่งไอเลน

---

[4] ไอโซทรอปิก (isotropic) ใช้อ้างถึงวัสดุที่มีสมบัติการจัดเรียงตัวหรือการเคลื่อนที่ของอะตอมที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง ในทางตรงกันข้าม หากวัสดุนั้นมีสมบัติการขึ้นกับทิศทางแล้วจะเรียกว่า แอนไอโซทรอปิก (anisotropic)

เบอร์เกอร์ (Eilenberger) [22] ได้อนุพัทธ์สมการขนส่งสำหรับตัวนำยวดยิ่ง (transport-like equations for superconductor) ขึ้นมา โดยการอาศัยการพิจารณาฟังก์ชันกรีนที่ถูกเฉลี่ยในสารเจือ (impurity-averaged Green's functions) ต่อมาไม่นานอูซาเดล (Usadel) [23] ได้ใช้สมมติฐานวิถีเสรีเฉลี่ยสั้น (short mean-free paht) ที่ต่อยอดจากผลงานของมากิและสึเนโตะ [24] ที่ว่าสำหรับกรณีวิถีเสรีจำกัด (finite mean-free paht) อำนาจแม่เหล็กพาราเชิงวงโคจร (orbital paramagnetism) ไม่ส่งผลต่อการเปลี่ยนเฟส ซึ่งสมมติฐานนี้ทำให้การเคลื่อนที่ของคู่คูเปอร์มีลักษณะใกล้เคียงกับแบบไอโซทรอปิกและนำมาสู่สมการการแพร่แบบอูซาเดล

ตารางที่ 1 ทฤษฎีสำหรับตัวนำยวดยิ่งที่ไม่เอกพันธุ์

	แบบเชิงจุลภาค (microscopic model)	แบบเชิงกึ่งแบบฉบับ (quasiclassical model)
วิธีฟังก์ชันคลื่น (Wave function methods)	สมการโบโกลุยบอฟ – เดอเจนน์ (Bogoliubov – de Gennes equation)	สมการแอนเดรเยฟ (Andreev equation)
วิธีฟังก์ชันกรีน (Green function methods)	สมการกอร์คอฟ (Gor'kov equation)	สมการไอเลนเบอเกอร์ – ลาร์คิน – ออฟชินนิคอฟ (Eilenberger – Larkin – Ovchinnikov equation)

ดังนั้น หัวข้อนี้จะกล่าวถึงเครื่องมือที่ใช้การได้ง่ายและสะดวกที่สุดสำหรับปัญหาตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือ นั่นคือ วิธีฟังก์ชันกรีนในทฤษฎีเชิงกึ่งแบบฉบับ โดยเบื้องต้นจะวิจารณ์สมการไอเลนเบอเกอร์ (Eilenberger's equation) ที่กำเนิดฟังก์ชันกรีนที่ถูกเฉลี่ยตลอดช่วงพลังงาน และสำหรับการประมาณบางเงื่อนไขจะนำมาสู่สมการอูซาเดล (Usadel's equation) ที่เป็นเครื่องมือหลักในการคำนวณหาสมการที่ใช้บรรยายอุณหภูมิวิกฤตในระบบไฮบริดจ์ SC-FM ที่เป็นจุดประสงค์หลักของงานวิจัยนี้

สมการไอเลนเบอร์เกอร์ (Eilenberger's equation) และสมการอูซาเดล (Usadel's equation)

อีกหนึ่งวิธีในทฤษฎีระดับจุลภาคของตัวนำยวดยิ่ง คือการใช้ฟังก์ชันกรีน (Green's function) เทคนิคฟังก์ชันกรีนสำหรับตัวนำยวดยิ่งถูกเสนอโดยกอร์คอฟ (Gor'kov) [21] เป็นผู้ที่กำเนิดฟังก์ชันกรีนแบบปกติ (normal Green's function ; $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$) และฟังก์ชันอะนอมาลุส (anomalous function ; $F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$) เทคนิคนี้ทรงพลังอย่างมาก แต่โดยทั่วไปฟังก์ชันกรีนค่อนข้างซับซ้อนและมีการกวัดแกว่งตามฟังก์ชันของพิกัดสัมพัทธ์ $\mathbf{r}_1$ - $\mathbf{r}_2$ ของระยะระหว่างอะตอม ในอีกแง่หนึ่ง ลักษณะของความยาวในสภาพยวดยิ่งของระบบตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร มีความหนาของลำดับชั้นหรือความยาวที่หน่วงลง ทำให้เกิดสภาพยวดยิ่งและมีขนาดใหญ่กว่าความยาวของอะตอม ความผันแปรนี้อธิบายโดยพิกัดของศูนย์กลางมวล $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$ ของฟังก์ชันกรีน

สมการเชิงกึ่งแบบฉบับ (quasiclassical equation) ของฟังก์ชันกรีนที่ถูกเฉลี่ยจะมีการกวัดแกว่งอย่างรวดเร็วบนพิกัดสัมพัทธ์ $\mathbf{r}_1$ - $\mathbf{r}_2$ ถูกเสนอโดย ไอเลนเบอร์เกอร์ (Eilenberger 1968) [22] และลาร์คิน-ออฟชินนิคอฟ (Larkin & Ovchinnikov 1968) [25] เพื่อใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในระบบแผ่นประกบ มันคือสมการการขนส่งค่าพลังงานที่ถูกอินทิเกรตตลอดช่วงพลังงาน (energy-integrated) ของฟังก์ชันกรีน $f(\mathbf{r},\omega,\hat{n})$ และ $g(\mathbf{r},\omega,\hat{n})$ ในรูปอย่างง่าย ที่ขึ้นอยู่กับพิกัดของศูนย์กลางมวล $\mathbf{r}$ และความถี่เฟอร์มิออน (Fermionic frequencies) คือ $\omega=\pi T(2n+1)$ ในที่นี้จะเรียกว่า ความถี่มัตสึบาระ (Matsubara frequencies) และทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ตั้งฉากกับพื้นผิวเฟร์มี สำหรับกรณีมัลติเลเยอร์ SC-FM ในที่นี้เราจะจัดรูปแบบสถานการณ์ขึ้นมาเอง เมื่อปริมาณทั้งหมดขึ้นอยู่กับพิกัด $\mathbf{x}$ ที่ตั้งฉากกับชั้นโลหะเท่านั้นและให้ θ คือ มุมระหว่างแกน $\mathbf{x}$ กับทิศทางของเวกเตอร์ $\hat{n}$ (ทิศทางของความเร็วเฟร์มี) จึงสามารถเขียนสมการไอเลนเบอร์เกอร์ที่ปรากฏพจน์สนามแลกเปลี่ยน (exchange field ; $h(x)$) ดูตัวอย่างได้ที่ [26] และบทวิจารณ์ในฟิสิกส์ของรอยต่อโจเซฟสัน (physics of Josephson junctions) โดยโกลูบอฟและคูพริยานอฟ [27]

$$\left(\omega+ih(x)+\frac{1}{2\tau}G(x,\omega)\right)f(x,\theta,\omega)+\frac{1}{2}v_F\cos\theta\frac{\partial f(x,\theta,\omega)}{\partial x}=\left(\Delta(x)+\frac{1}{2\tau}F(x,\omega)\right)g(x,\theta,\omega)$$

$$G(x,\omega)=\int\frac{d\Omega}{4\pi}g(x,\theta,\omega)$$

$$F(x,\omega)=\int\frac{d\Omega}{4\pi}f(x,\theta,\omega)$$

$$f(x,\theta,\omega)\, f^{\dagger}(x,\theta,\omega)+g^{2}(x,\theta,\omega)=1 \tag{3.1}$$

ในที่นี้ ฟังก์ชัน $f^{\dagger}(x,\hat{\mathrm{n}},\omega)$ ยังคงตอบสนองในสมการเช่นเดียวกับฟังก์ชัน $f(x,-\hat{\mathrm{n}},\omega)$ ด้วยพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ $\Delta \rightarrow \Delta^{*}$ ในสมการโบโกลุยบอฟ – เดอเจนน์ (Bogoliubov – de Gennes equation) [18],[28] และ Ω หมายถึง การอินทิเกรตตลอดทิศทางของความเร็วอิเล็กตรอนที่บริเวณผิวเฟร์มี (Fermi surface)

การปรากฏของสารเจือ (impurity) ถูกอธิบายด้วยเวลาของการกระเจิงแบบยืดหยุ่น (elastic scattering time ; τ) ที่มีความสัมพันธ์กับความเร็วเฟร์มี (Fermi velocity ; v_F) และวิถีเสรีเฉลี่ยของ อิเล็กตรอน (electron mean free path ; l) เป็น $\tau = l/v_F$ และ $G(x,\omega)$ และ $F(x,\omega)$ ก็คือ ฟังก์ชันกรีนที่ถูกเฉลี่ยบนผิวเฟร์มี สมการไอเลนเบอร์เกอร์จะสมบูรณ์ได้ด้วยสมการคล้องจองกันในตัว (self-consistent equation) โดยศักย์การจับคู่ (pair potential ; Δ) หรือที่เรียกกันว่า ออเดอร์พารามิเตอร์ (order parameter) ในที่นี้จะเรียกว่า พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ ในชั้นตัวนำยวดยิ่ง

$$\Delta(x)=\pi T\lambda\sum_{\omega}F(x,\omega) \tag{3.2}$$

เมื่อ λ คือ ค่าคงที่ของการเข้าคู่แบบบีซีเอส (BCS coupling constant) ซึ่งเป็นอิสระเชิงพื้นที่ในชั้นตัวนำยวดยิ่ง ในขณะที่หากพิจารณาในชั้นแม่เหล็กเฟร์โรแล้วมันจะเป็นศูนย์ เนื่องจากกลไกการเข้าคู่แบบบีซีเอสเป็นเหตุในการเกิดสภาพยวดยิ่ง และ T คือ อุณหภูมิที่เปลี่ยนไปของตัวนำยวดยิ่งที่เกิดจากแผ่นประกบ SC-FM ดังนั้น ในชั้นตัวนำยวดยิ่ง สมการคล้องจองกันในตัว (self-consistent equation) อาจถูกเขียนในรูป

$$\Delta(x)\ln\frac{T}{T_{cs}}+\pi T\sum_{\omega}\left(\frac{\Delta(x)}{|\omega|}-F(x,\omega)\right)=0 \tag{3.3}$$

เมื่อ T_{cs} คือ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งเชิงปริมาตร (critical temperature of bulk superconductor)

สังเกตว่าสมการไอเลนเบอร์เกอร์ที่เสนอขึ้นเป็นทางเลือกของแกนสปินควอนไทต์ตามทิศของสนามแลกเปลี่ยน ในรูปมาตรฐานเหล่านี้หากพิจารณาในชั้นแม่เหล็กเฟร์โรต้องแทนความถี่มัตสึบาระ

(Matsubara frequencies) [29] เป็น $\tilde{\omega} = \omega + ih(x)$ เมื่อ $\omega = \pi T(2n+1)$ เหนือสิ่งอื่นใด เมื่อพิจารณาเงื่อนไขจำกัดสารเจือ (dirty limit) วิถีเสรีเฉลี่ย l ในการกระเจิงของอิเล็กตรอนในระบบ SC-FM จะมีพิสัยสั้น ทำให้สมการไอเลนเบอร์เกอร์ถูกแทนที่ด้วยสมการอูซาเดล (Usadel's equations) ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบที่ง่ายกว่ามาก กล่าวคือ เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการใช้สมการอูซาเดล คือ $T_c\tau \ll 1$ และ $h\tau \ll 1$ และอีกหนึ่งเงื่อนไขที่มีข้อจำกัดมากกว่า นั่นคือ ค่าของสนามแลกเปลี่ยนที่เข้มมากเมื่อเทียบกับอุณหภูมิวิกฤต หรือได้ว่า $h \gg T_c$

ขอให้ตระหนักว่า สมการอูซาเดลมีผลเฉพาะฟังก์ชันกรีน $G(x,\omega)$ และ $F(x,\omega)$ ที่ถูกเฉลี่ยตลอดผิวเฟร์มี ดังนั้น สมการอูซาเดลในบริเวณตัวนำยวดยิ่งและบริเวณแม่เหล็กเฟร์โร จึงถูกเขียนเป็น

$$-\frac{D_{sc,fm}}{2}\left[G(x,\omega,h)\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,\omega,h) - F(x,\omega,h)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\omega,h)\right] + \tilde{\omega}_{sc,fm}F(x,\omega,h) = \Delta_{sc,fm}(x)G(x,\omega,h) \tag{3.4}$$

$$G^2(x,\omega,h) + F(x,\omega,h)F^*(x,\omega,h) = 1 \tag{3.5}$$

โดยที่ $D_{sc,fm} = \left(\frac{1}{3}v_F l\right)_{sc,fm}$ คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ (diffusion coefficient) ซึ่งในบริเวณ SC และ FM จะมีค่าต่างกัน และฟังก์ชัน $F^\dagger(x,\omega,h)$ จะเหมือนกับฟังก์ชัน $F(x,\omega,h)$ โดยการแทน $\Delta_{sc,fm} \to \Delta^*_{sc,fm}$ และสมการอูซาเดลจะมีความสมบูรณ์ได้โดยการใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่รอยต่อระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟร์โร (interface SC-FM) ที่กล่าวไว้ใน [30] ที่คำนึงถึงค่าความโปร่งใส (ความต้านทานไฟฟ้า) ที่บริเวณรอยต่อ (transparency of the interfaces ; γ_b) ที่มีความสัมพันธ์กับความต้านทาน R_b นั่นคือ $\gamma_b = R_b\,\sigma_{fm}/\xi_{sc}$ เมื่อ $\xi_{sc,fm} = \sqrt{D_{sc,fm}/2\pi T_{cs}}$ และ $\sigma_{sc,fm}$ คือ ความยาวอาพันธ์ (coherence length) และสภาพนำ (conductivity) ที่บริเวณ SC และ FM ตามลำดับ

พิจารณาสมการอูซาเดลในบริเวณตัวนำยวดยิ่งและบริเวณโลหะแม่เหล็กเฟร์โร หากเราพิจารณาค่าที่ใกล้เคียงกับอุณหภูมิวิกฤตแล้วจะสามารถทำให้สมการที่ (3.4) อยู่ในรูปที่เรียกว่า สมการอูซาเดลเชิงเส้น (linearized Usadel equation) ทำให้ฟังก์ชันกรีนจะถูกแทนที่เป็นค่า ๆ หนึ่ง $G(x,\omega,h) \simeq G$ ในกรณีที่ไร้สภาพยวดยิ่ง [31] กล่าวคือ $G = \operatorname{sgn}\omega$ ในที่นี้ $\operatorname{sgn}\omega$ คือ

ฟังก์ชันซิกนัม (signum function หรือ sign function) ในบริเวณตัวนำยวดยิ่งสมการอูซาเดลเชิงเส้นถูกเขียนในรูป

$$-\frac{D_{sc}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{sc}\left(x,\omega\right)+\omega F_{sc}\left(x,\omega\right)\operatorname{sgn}\omega=\Delta$$

หรือ

$$\left(-\frac{D_{sc}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\omega\right)F_{sc}\left(x,\omega\right)=\Delta \tag{3.6}$$

โดยการแทน $\tilde{\omega}_{sc}=\omega$ และ $\Delta_{sc}\left(x\right)=\Delta\left(x\right)$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถเขียนสมการอูซาเดลในบริเวณแม่เหล็กเฟร์โรในรูปเชิงเส้นได้โดยการแทน $\tilde{\omega}_{fm}=\omega+ih\left(x\right)$ และพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบใน FM มีค่าเป็นศูนย์เสมอ $\Delta_{fm}\left(x\right)=0$ จะได้

$$-\frac{D_{fm}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{fm}\left(x,\omega,h\right)+\left[\omega+ih\left(x\right)\right]F_{fm}\left(x,\omega,h\right)\operatorname{sgn}\omega=0$$

หรือ

$$\left(-\frac{D_{fm}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\omega\right)F_{fm}\left(x,\omega,h\right)+ih\left(x\right)\operatorname{sgn}\omega F_{fm}\left(x,\omega,h\right)=0 \tag{3.7}$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (3.6) และ (3.7) มีความเรียบง่ายต่อการคำนวณระบบไฮบริจด์ SC-FM ในเงื่อนไขขีดจำกัดสารเจือ (dirty limit) และสมการดังกล่าวเราเรียกว่า สมการอูซาเดลเชิงเส้นในบริเวณตัวนำยวดยิ่งและบริเวณแม่เหล็กเฟร์โร ตามลำดับ

3.2 ปรากฏการณ์แผ่นประกบตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ชนิดไบเลเยอร์ (bilayer)

ถัดมาจะนำงานที่แสดงถึงความไม่เป็นอิสระลักษณะไม่เป็นเชิงเดี่ยวของอุณหภูมิวิกฤต (nonmonotonic dependence of critical temperature) เมื่อนำตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟร์โรมาประกบเข้าด้วยกัน งานนี้ถูกตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 2002 เสนอโดยโฟมีนอฟและคณะ (Fominov et al.) [11] พวกเขาใช้การประมาณโหมดเดียว (single - mode approximation) และวิธีหลายโหมด (milti - mode method) เพื่อคำนวณสมการที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤต T_c ของแผ่น

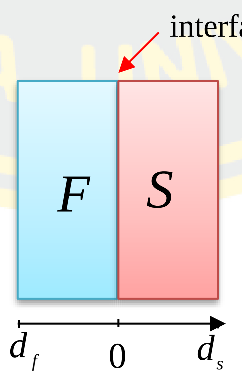
ประกบ SC-FM หรือที่เรียกว่าสูตร อบริโคซอฟ – กอร์คอฟ (Abrikosov – Gor’ kov like - formula)

แบบจำลองของแผ่นประกบ SC-FM จะกำหนดความหนาแต่ละชั้นด้วยขนาด d_s และ d_f ตามลำดับ ดังรูปที่ 9 การคำนวณภายใต้เงื่อนไขวิถีเสรีเฉลี่ยสั้นมากเมื่อเทียบกับระยะอาพันธ์ $l \ll \xi_{sc}$ เงื่อนไขดังกล่าวจะสนองการคำนวณในเงื่อนไขขีดจำกัดสารเจือ (dirty limit) จึงสามารถหยิบยกสมการอูซาเดลเชิงเส้นในชั้น SC-FM จากสมการที่ (3.6) และ (3.7) มาใช้ได้ และหากเราแทน $D_{sc,fm}/2 = \xi^2_{sc,fm}\pi T_{cs}$ ลงในสมการ (3.6) และ (3.7) จะได้ว่า

$$\xi^2_{sc.}\pi T_{cs}\frac{d^2}{dx^2}F_{sc}\left(x,\omega\right)-\left|\omega\right|F_{sc}\left(x,\omega\right)+\Delta\left(x\right)=0 \qquad \text{เมื่อ } 0<x<d_s \qquad (3.8)$$

$$\xi^2_{fm}\pi T_{cs}\frac{d^2}{dx^2}F_{fm}\left(x,\omega\right)-\left(\left|\omega\right|+ih\,\mathrm{sgn}\,\omega\right)F_{fm}\left(x,\omega\right)=0 \quad \text{เมื่อ } -d_f<x<0 \qquad (3.9)$$

เมื่อ T_{cs} คือ อุณหภูมิวิกฤตในตัวนำยวดยิ่ง (critical temperature of the superconductor) เป็นที่ทราบกันดีว่าการคำนวณสูตรอบริโคซอฟ – กอร์คอฟ ที่ใช้บรรยายอุณหภูมิวิกฤตจะต้องใช้สมการที่ (3.8) และ (3.9) ร่วมกับสมการคล้องจองกันในตัว (self-consistent equation) ตามสมการที่ (3.2) และการคำนวณจะใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวนอก (outer surface) และเงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อ (interface)



รูปที่ 9 แสดงรูปร่างลักษณะของแผ่นประกบระหว่าง SC-FM

โดยเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวนอกของชั้น SC และ FM อนุพันธ์ของ F_{sc} และ F_{fm} จะต้องเป็นศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\frac{dF_{sc}(d_s)}{dx} = \frac{dF_{fm}(-d_f)}{dx} = 0 \tag{3.10}$$

และเงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อ $(x=0)$ ฟังก์ชัน F_{sc} และ F_{fm} และอนุพันธ์จะมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\xi_{sc}\frac{dF_{sc}(0)}{dx} = \gamma\xi_{fm}\frac{dF_{fm}(0)}{dx} \quad \text{และ} \quad \gamma = \frac{\rho_{sc}}{\rho_{fm}}\frac{\xi_{sc}}{\xi_{fm}} \tag{3.11}$$

$$\gamma_b\xi_{fm}\frac{dF_{fm}(0)}{dx} = F_{sc}(0) - F_{fm}(0) \quad \text{และ} \quad \gamma_b = \frac{R_b}{\rho_{fm}}\frac{A}{\xi_{fm}} \tag{3.12}$$

ในที่นี้ ρ_{sc} และ ρ_{fm} คือ สภาพต้านทานในสถานะปกติของ SC-FM ตามลำดับ R_b คือ ความต้านทานขอบเขต SC-FM และ A คือ ภาคตัดขวาง ต่อมาให้พิจารณาสมการที่ (3.9) ในบริเวณ FM สังเกตว่าไม่ใช่เรื่องยากที่จะแก้สมการหาผลเฉลยของฟังก์ชัน $F_{fm}(x,\omega)$ เพราะเป็นสมการเอกพันธุ์ และการใช้เงื่อนไขขอบเขตผิวนอกของ FM นำมาซึ่งผลเฉลยในรูป

$$F_{fm}(x,\omega) = C(\omega)\cosh\left[k_f\left(x+d_f\right)\right] \tag{3.13}$$

ในที่นี้ $C(\omega)$ คือ ค่าคงที่ และ $k_f = \frac{1}{\xi_f}\sqrt{\frac{|\omega| + ih\operatorname{sgn}\omega}{\pi T_{cs}}}$

พิจารณาฟังก์ชัน $F_{fm}(x,\omega)$ และอนุพันธ์ $F'_{fm}(x,\omega)$ ที่บริเวณรอยต่อ $x=0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_{fm}(0) &= C(\omega)\cosh\left(k_f d_f\right) \\ \frac{dF_{fm}(0)}{dx} &= k_f \tanh\left(k_f d_f\right) F_{fm}(0) \end{aligned} \tag{3.14}$$

นำสมการ (3.14) แทนลงในสมการ (3.11) จะพบว่า

$$F_{fm}(0) = \frac{\xi_{sc}B_f(\omega)}{\gamma}\frac{dF_{sc}(0)}{dx} \tag{3.15}$$

โดยที่ $B_f(\omega) = \left[\xi_{fm} k_f \tanh\left(k_f d_f\right)\right]^{-1}$

ต่อมาให้นำ $\dfrac{dF_{fm}(0)}{dx}$ จากสมการที่ (3.11) และ $F_{fm}(0)$ จากสมการที่ (3.15) แทนกลับลงไปยังสมการที่ (3.12) จะได้เงื่อนไขขอบเขต

$$\xi_{sc} \frac{dF_{sc}(0)}{dx} = \frac{\gamma}{\gamma_b + B_f(\omega)} F_{sc}(0) \tag{3.16}$$

เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตนี้เป็นส่วนจินตภาพ (imaginary part) ซึ่งเราจะเขียนใหม่ในรูปจริง โดยอาศัยความจริงที่ว่า

$$F^{\pm}(x,\omega) = F(x,\omega) \pm F(x,-\omega) \tag{3.17}$$

สิ่งนี้จะทำให้พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ $\Delta(x)$ ในสมการที่ (3.2) กลายเป็น

$$\Delta(x) = \lambda \pi T \sum_{\omega>0} F_{sc}^{+}(x,\omega) \tag{3.18}$$

ถัดมาให้พิจารณาในบริเวณตัวนำยวดยิ่งในเทอมของ F_{sc}^{+} และ F_{sc}^{-} โดย F_{sc}^{+} เป็นส่วนจริงและ F_{sc}^{-} เป็นส่วนจินตภาพและใช้ประโยชน์จากความสมมาตรของสมการอูซาเดลที่ว่า

$$F(x,-\omega) = F^{*}(x,\omega) \tag{3.19}$$

สิ่งนี้จะทำให้สมการที่ (3.8) แยกได้สองสมการ ได้แก่ สมการไม่เอกพันธุ์สำหรับ $F_{sc}^{+}(x,\omega)$ และสมการเอกพันธุ์สำหรับ $F_{sc}^{-}(x,-\omega)$ ดังนี้

$$\xi_{sc}^{2} \pi T_{cs} \frac{d^2 F_{sc}^{+}(x,\omega)}{dx^2} - \omega F_{sc}^{+}(x,\omega) + 2\Delta(x) = 0 \tag{3.20}$$

และ

$$\xi_{sc}^{2} \pi T_{cs} \frac{d^2 F_{sc}^{-}(x,\omega)}{dx^2} - \omega F_{sc}^{-}(x,\omega) = 0 \tag{3.21}$$

แก้สมการเอกพันธุ์ (3.21) โดยอาศัยเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวนอกของตัวนำยวดยิ่ง จะได้ $F_{sc}^{-}(x,\omega)$ เป็น

$$F_{sc}^{-}(x,\omega)=iA(\omega)\cosh\left[k_s(x-d_s)\right] \tag{3.22}$$

โดยที่ $k_s=\dfrac{1}{\xi_{sc}}\sqrt{\dfrac{\omega}{\pi T_{cs}}}$ และ $A(\omega)$ คือ แอมพริจูดของฟังก์ชัน และทำการพิจารณาที่บริเวณรอยต่อ $x=0$ ของฟังก์ชันและอนุพันธุ์ของฟังก์ชัน $F_{sc}^{-}(x,\omega)$ จะได้ว่า

$$F_{sc}^{-}(0,\omega)=iA(\omega)\cosh(k_s d_s)$$

และ

$$\frac{dF_{sc}^{-}(0,\omega)}{dx}=-ik_s A(\omega)\sinh(k_s d_s) \tag{3.23}$$

จากนั้นเขียนเงื่อนไขขอบเขตของสมการที่ (3.16) ในเทอมของ $F_{sc}(0)$ และ $F_{sc}^{*}(0)$

$$\begin{aligned}\xi_{sc}\frac{dF_{sc}(0)}{dx}&=\frac{\gamma}{\gamma_b+B_f(\omega)}F_{sc}(0)\\ \xi_{sc}\frac{dF_{sc}^{*}(0)}{dx}&=\frac{\gamma}{\gamma_b+B_f^{*}(\omega)}F_{sc}^{*}(0)\end{aligned} \tag{3.24}$$

นำทั้งสองสมการของ (3.24) มาบวกกัน จะได้เงื่อนไขขอบเขตในเทอม $F_{sc}^{+}(0)$ และ $F_{sc}^{-}(0)$ ดังนี้

$$\xi_{sc}\frac{dF_{sc}^{+}(0)}{dx}=\gamma\cdot\frac{\left[\left(\gamma_b+\operatorname{Re}B_f(\omega)\right)F_{sc}^{+}(0)-i\operatorname{Im}B_f(\omega)F_{sc}^{-}(0)\right]}{\left(\gamma_b+B_f(\omega)\right)\left(\gamma_b+B_f^{*}(\omega)\right)} \tag{3.25}$$

และหากนำทั้งสองของสมการที่ (3.24) มาลบกัน จะได้เงื่อนไขในเทอม $F_{sc}^{+}(0)$ และ $F_{sc}^{-}(0)$ ดังนี้

$$\xi_{sc}\frac{dF_{sc}^{-}(0)}{dx}=\gamma\cdot\frac{\left[\left(\gamma_b+\operatorname{Re}B_f(\omega)\right)F_{sc}^{-}(0)-i\operatorname{Im}B_f(\omega)F_{sc}^{+}(0)\right]}{\left(\gamma_b+B_f(\omega)\right)\left(\gamma_b+B_f^{*}(\omega)\right)} \tag{3.26}$$

จากสมการที่ (3.26) เราสามารถคำนวณหาแอมพริจูด $A(\omega)$ ในรูปของ $F_{sc}^{+}(0)$ โดยการแทน $F_{sc}^{-}(0)$ ในสมการที่ (3.23) ลงไปแล้วจะพบว่า

$$A(\omega)\cosh(k_s d_s)=\gamma\cdot\frac{\operatorname{Im}B_f(\omega)F_{sc}^{+}(0)}{A_s\left(\gamma_b+B_f(\omega)\right)\left(\gamma_b+B_f^{*}(\omega)\right)+\gamma\left(\gamma_b+\operatorname{Re}B_f(\omega)\right)}$$

เมื่อ $A_s = \xi_{sc} k_s \tanh\left(k_s d_s\right)$

หรือ

$$F_{sc}^{-}\left(0\right) = i\gamma \cdot \frac{\operatorname{Im} B_f\left(\omega\right)}{A_s\left(\gamma_b + B_f\left(\omega\right)\right)\left(\gamma_b + B_f^{*}\left(\omega\right)\right) + \gamma\left(\gamma_b + \operatorname{Re} B_f\left(\omega\right)\right)} \tag{3.27}$$

แทนสมการที่ (3.27) ลงไปยังสมการที่ (3.25) ท้ายที่สุดจะได้เงื่อนไขขอบเขตในรูป

$$\xi_{sc}\frac{dF_{sc}^{+}\left(0\right)}{dx} = W\left(\omega\right)F_{sc}^{+}\left(0\right) \tag{3.28}$$

โดยที่ $W\left(\omega\right)$ คือ ฟังก์ชันขอบเขต (boundary function) และอีกเงื่อนไขขอบเขตที่ได้รับเพิ่มเติม คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่บริเวณผิวนอกของตัวนำยวดยิ่งจะต้องเป็นศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\begin{gathered}\frac{dF_{sc}^{+}\left(d_s\right)}{dx} = 0 \\ W\left(\omega\right) = \gamma \cdot \frac{\gamma + A_s\left(\gamma_b + \operatorname{Re} B_f\left(\omega\right)\right)}{A_s\left|\gamma_b + B_f\left(\omega\right)\right|^2 + \gamma\left(\gamma_b + \operatorname{Re} B_f\left(\omega\right)\right)}\end{gathered} \tag{3.29}$$

เมื่อได้เงื่อนไขขอบเขตสำหรับ F_{sc}^{+} แล้ว ในขั้นตอนถัดไปจะทำการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของ SC-FM ชนิดไบเลเยอร์ จากการประมาณโหมดเดียว (single - mode approximation ; SMA) ที่จัดอยู่ในรูป

$$F_{sc}^{+}\left(x,\omega\right) = f\left(\omega\right)\cos\left(\Omega\frac{x - d_s}{\xi_{sc}}\right) \tag{3.30}$$

และ

$$\Delta\left(x\right) = \delta\cos\left(\Omega\frac{x - d_s}{\xi_{sc}}\right) \tag{3.31}$$

จากนั้นให้ทำการพิจารณาที่ผิวนอกของตัวนำยวดยิ่ง $x = d_s$ แล้วแทนกลับลงไปยังสมการที่ (3.20)

$$f\left(\omega\right) = \frac{2\delta}{\omega + \Omega^2 \pi T_{cs}} \tag{3.32}$$

และสมการคล้องจองกันในตัว ในสมการที่ (3.3) โดยจะดัดแปลงให้อยู่ในรูป $F_{sc}^{+}\left(x,\omega\right)$ เขียนแสดงดังนี้

$$\Delta \ln \frac{T_{cs}}{T} = \pi T \sum_{\omega>0}\left(\frac{2\Delta}{\omega} - F_{sc}^{+}\left(x,\omega\right)\right) \tag{3.33}$$

จากนั้นให้แทนสมการที่ (3.30) และสมการที่ (3.31) ลงไปในสมการที่ (3.33) พร้อมกับใช้สมการที่ (3.32) จะได้

$$\Delta \ln \frac{T}{T_{cs}} = \pi T \sum_{\omega>0}\left(\frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega + \Omega^2 \pi T_{cs}}\right) \tag{3.34}$$

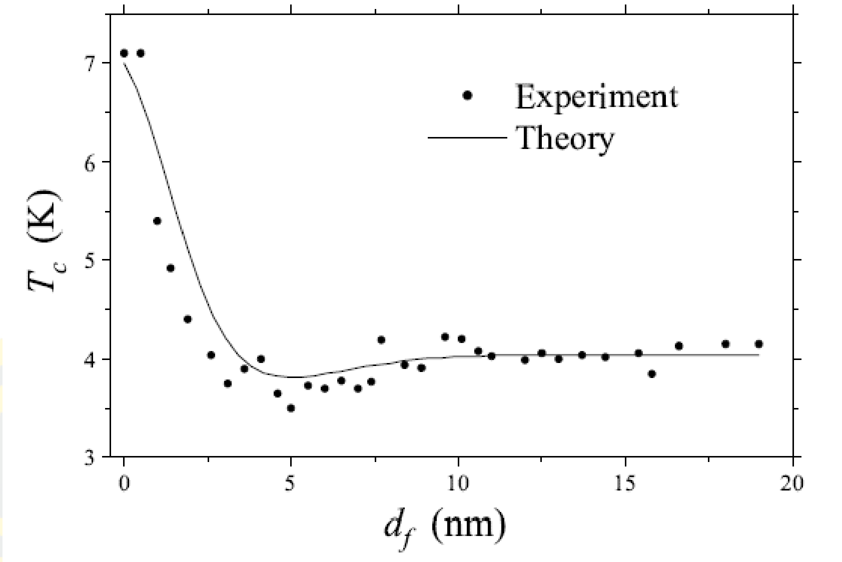
จัดรูปใหม่โดยแทนความถี่มัตสึบาระ $\omega = \left(2n+1\right)\pi T$ และใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไดแกมม่า (digamma function) ท้ายที่สุดจะได้สูตร อบริโคซอฟ – กอร์คอฟ ที่มีรูปแบบดังนี้

$$\ln \frac{T_{cs}}{T} = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega^2}{2}\frac{T_{cs}}{T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \tag{3.35}$$

รากของสมการที่ (3.35) สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขตที่ $x = 0$ ในสมการที่ (3.28) จะอยู่ในรูป

$$\Omega \tan\left(\Omega \frac{d_s}{\xi_{sc}}\right) = W\left(\omega\right) \tag{3.36}$$

เรียก Ω นี้ว่า พารามิเตอร์การแตกคู่ (depairing parameter) ที่แสดงบทบาทเป็นตัวทำลายสภาพยวดยิ่ง

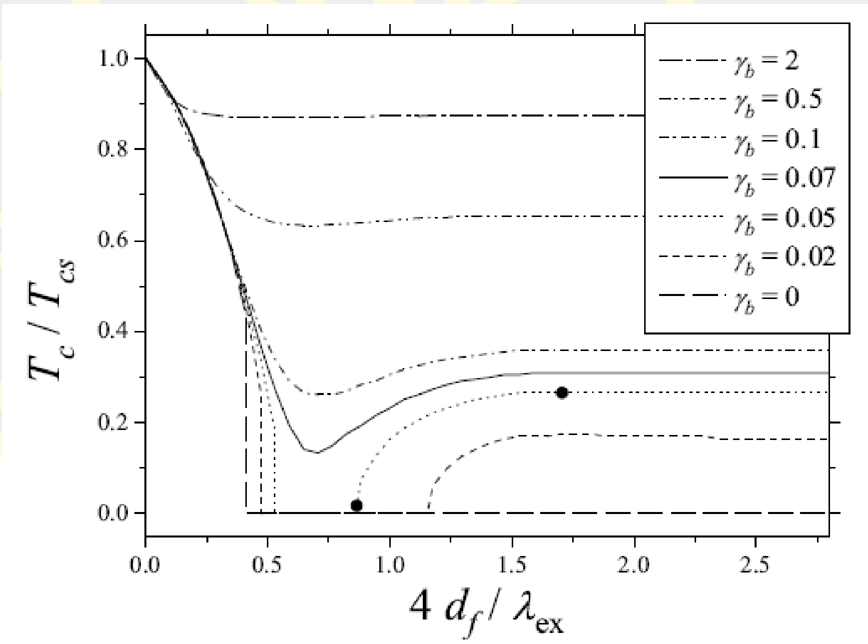


รูปที่ 10 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง T_c ที่แปรค่าตามความหนาของชั้นโลหะเฟร์โร d_f
อ้างอิงกราฟจากงาน [11]

ขั้นตอนสุดท้ายจะใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) เพื่อสังเกตพฤติกรรมการกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤต โดยสังเกตจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $T_c\left(K\right)$ และ $d_f\left(nm\right)$ (เส้นทึบ) ดังรูปที่ 10 สิ่งที่สังเกตได้จากทฤษฎี คือ หากประมาณให้พารามิเตอร์วัสดุมีค่าใกล้เคียงกับการทดลอง [32] ได้แก่ $d_s = 11nm,\ \rho_{sc} = 7.5\mu\Omega,\ \rho_{fm} = 60\mu\Omega,\ \xi_{sc} = 8.9nm,\ \xi_{fm} = 7.6nm$ และ $\gamma = 0.15$ อุณหภูมิวิกฤตจะลดลงอย่างฉับพลันที่ช่วงแคบ ๆ ของชั้นแม่เหล็กเฟร์โร $\left(d_f \ll \xi_{fm}\right)$ และมีลักษณะกวัดแกว่งอย่างเห็นได้ชัดเจน ตามกราฟ (เส้นทึบ) พบว่า $T_c\left(d_f = 0\right) \approx 7K$ ซึ่งก็คือ อุณหภูมิวิกฤตเชิงปริมาตรของตัวนำยวดยิ่ง T_{cs} แต่เมื่อความหนาของชั้นแม่เหล็กเฟร์โรมีขนาดเพิ่มขึ้น พฤติกรรมการกวัดแกว่งแทบจะสังเกตไม่ได้เลย ที่กล่าวมาข้างต้นพบว่าเป็นผลใกล้เคียงกับการทดลอง [32] (สัญลักษณ์จุด) ดังรูปที่ 10 ยิ่งไปกว่านั้น สนามแลกเปลี่ยน h และสภาพต้านทานไฟฟ้าที่รอยต่อ γ_b สามารถคำนวณค่าเชิงตัวเลขได้เป็น $h \approx 130K$ และ $\gamma_b = 0.3$

นอกจากนี้ ในงานได้แสดงกราฟของตัวแปรไร้หน่วยระหว่าง T_c กับ d_f ด้วยค่าต่าง ๆ ของ γ_b ได้แก่ 0, 0.02, 0.05, 0.07, 0.1, 0.5 และ 2 พบว่า γ_b เป็นส่วนสำคัญในการกำหนดพฤติกรรมของ

อุณหภูมิวิกฤต ขอให้สังเกตรูปที่ 11 กล่าวคือ หากพิจารณาให้ γ_b เป็นศูนย์ แอมพริจูดของอุณหภูมิวิกฤตจะลดลงตามการเพิ่มขึ้นความหนาเฟร์โรและจะสลายหายไปในที่สุด เราเรียกการสลายของอุณหภูมิลักษณะนี้ว่า การสลายเชิงเดี่ยว (monotonic decay) ถัดมาหากพิจารณาให้ γ_b มีค่าไม่เป็นศูนย์ (γ_b = 0.07, 0.1, 0.5 และ 2) แอมพริจูดของอุณหภูมิวิกฤตจะลดลงตามการเพิ่มขึ้นความหนาเฟร์โรและจะมีค่าจำกัดค่าหนึ่ง เรียกว่า การสลายไม่เป็นเชิงเดี่ยว (nomonotonic decay) นอกจากนี้ จากกราฟในรูปที่ 11 ยังมีบางค่าของ γ_b ที่พฤติกรรมของอุณหภูมิหายไปในบางช่วงของความหนาชั้นเฟร์โร (γ_b = 0.02 และ 0.05) พฤติกรรมเช่นนี้ถูกเรียกว่า พฤติกรรมการบังเกิดใหม่ (re-entrant behavior) หมายถึง คู่คูเปอร์ถูกแยกคู่ในบางช่วงของความหนาชั้นเฟร์โรและกลับมาเข้าคู่กันใหม่ในบางช่วงของความหนาเฟร์โร

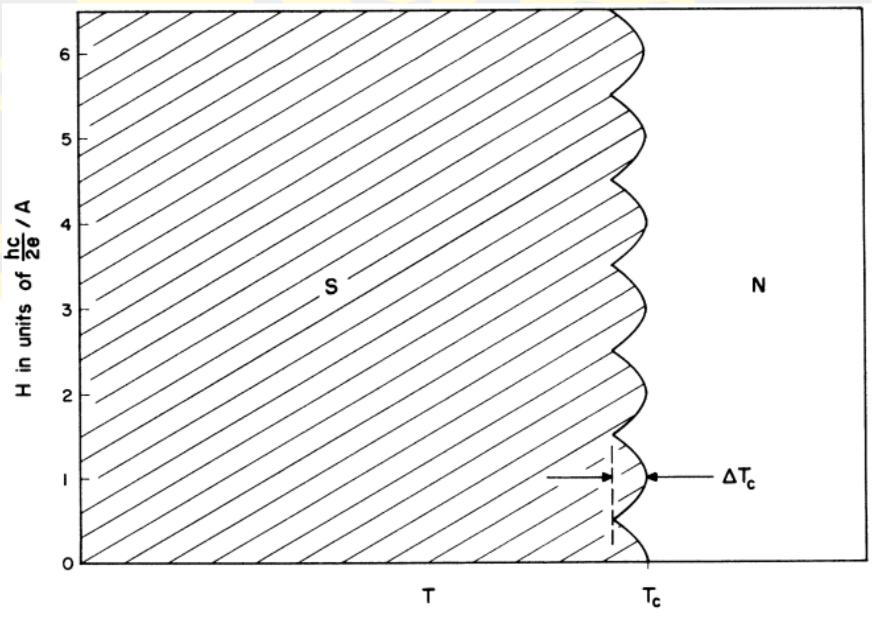


รูปที่ 11 ลักษณะเฉพาะของพฤติกรรม $T_c(d_f)$ เมื่อ d_f คือ ความหนาของชั้นแม่เหล็กเฟร์โรที่ถูกวัดในหน่วยของความยาวคลื่น λ_{ex} ที่มีนิยามเป็น $\lambda_{ex} = 2\pi\sqrt{D_{fm}/h}$

อ้างอิงกราฟจากงาน [11]

และอีกวิธีหนึ่งมีชื่อว่า วิธีหลายโหมด (multi - mode methods) จะไม่กล่าวถึง อย่างไรก็ตามทั้งสองวิธีนี้เป็นวิธีที่มีประโยชน์อย่างมากในการศึกษาพฤติกรรม T_c ในระบบแผ่นประกบ SC-FM

ต่อมาในปี ค.ศ. 2009 เหล่านักวิจัยกลุ่มหนึ่งได้เผยแพร่วารสารขึ้นมา ที่ศึกษาการกวัดแกว่งของอุณภูมิวิกฤต T_c ในโครงสร้างไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่ง - แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) แบบหลายเชิงที่ประกอบด้วยแกนโลหะเฟร์โรที่ถูกล้อมรอบด้วยเปลือกตัวนำยวดยิ่ง ซึ่งจะศึกษาในกรอบของสมการอูซาเดลเชิงเส้นผ่านปรากฎการณ์ลิตเติล-ปาร์ค ดั้งเดิมในปี ค.ศ.1962 ลิตเติลและปาร์ค ได้ทำการศึกษาตัวนำยวดยิ่งรูปทรงกระบอกที่ผ่านสนามแม่เหล็กภายนอกตามแนวทรงกระบอก ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นในการค้นพบปรากฏการณ์การแกว่งของอุณหภูมิวิกฤต T_c ที่แปรค่าตามฟลักซ์ซอยด์ ปรากฏการณ์นี้รู้จักกันดีในชื่อ ปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค (Little-Parks effect) [33] ดังรูปที่ 12 ที่ใช้อธิบายคุณสมบัติแม่เหล็กในตัวนำยวดยิ่งแบบหลายเชิง (multiply-connected superconductor) [34] ที่มีลักษณะคล้ายหลุม

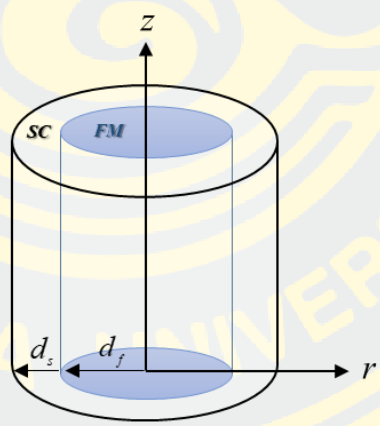


รูปที่ 12 แสดงถึงภาวะคาบของอุณภูมิวิกฤตที่แปรค่าตามฟลักซ์ซอยด์ อ้างอิงกราฟจากงาน [33,34]

สำหรับการวิจารณ์งานวิจัยที่มีส่วนเกี่ยวข้องในหัวข้อวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยประสงค์นำวารสารที่ศึกษาในหัวข้อ โครงสร้างไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ชนิดทรงกระบอก รวมทั้งสิ้น 3 วารสาร มาวิจารณ์อย่างละเอียด ดังที่กล่าวในช่วงต้นของบทนี้ การวิจารณ์วารสารเหล่านี้จะเป็นส่วนเสริมให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

3.3 ปรากฏการณ์แผ่นประกบของตัวนำยวดยิ่ง - โลหะเฟร์โร SC-FM ชนิดทรงกระบอก (proximity effect of SC-FM cylinder)

พิจารณาโครงสร้างไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) แบบหลายเชิงที่มีลักษณะเป็นทรงกระบอกเชิงสมมาตร โดยแกนกลางเป็นโลหะเฟร์โรที่ล้อมรอบด้วยตัวนำยวดยิ่งผนังบางและสมมติว่าโลหะทั้งสองมีการสัมผัสกันทางไฟฟ้าได้ดี ดังรูปที่ 13 การคำนวณหาสมการที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤต T_c จะถูกศึกษาบนพื้นฐานของสมการอูซาเดลเชิงเส้น



รูปที่ 13 โครงสร้างแผ่นประกบแบบไฮบริดจ์ของตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร ภายใต้การพิจารณาตัวนำยวดยิ่งเปลือกบางขนาด d_s ที่ล้อมรอบแกนโลหะเฟร์โรรัศมี d_f [35]

อย่างไรก็ดี การศึกษาพฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤต T_c ในแบบจำลองลักษณะนี้ สามารถจำแนกศึกษาได้หลากหลายกรณี ยกตัวอย่างเช่น การศึกษาในโครงสร้างไฮบริดจ์ SC-FM ในกรณีที่ไม่คำนึงถึงสนามแม่เหล็กภายนอก เพื่อตรวจสอบบทบาทสำคัญของสนามแลกเปลี่ยน (exchange field) ในบริเวณโลหะ FM ที่เกิดมาจากโมเมนต์แม่เหล็ก นำมาสู่การเปลี่ยนชั้นวงโคจรของคู่คูเปอร์ รู้จักกันใน

ชื่อ ปรากฏการณ์การผลัดเปลี่ยน (switching phenomena) หรือการศึกษา T_c ในกรณีที่ประยุกต์สนามแม่เหล็กภายนอกเข้าระบบ ที่พบการแกว่งของอุณหภูมิวิกฤต T_c ตามการแปรค่าของฟลักซ์ซอยด์ รู้จักกันในชื่อ ปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค (Little-Parks effect) นอกจากนี้ยังสามารถแบ่งการพิจารณาเทอมของสนามแลกเปลี่ยนได้เป็นสองประเภท ได้แก่ สนามแลกเปลี่ยนเอกพันธุ์ (homogeneous exchange field) และสนามแลกเปลี่ยนไม่เอกพันธุ์ (inhomogeneous exchange field) โดยปรกติแล้วพจน์ของสนามแลกเปลี่ยนจะปรากฏในสมการที่ใช้สำหรับปัญหาแผ่นประกบ หากสนามแลกเปลี่ยนถูกเลือกให้เป็นประเภทสนามเอกพันธุ์แล้วขั้นตอนการแก้สมการทางคณิตศาสตร์จะไม่ซับซ้อน มักพบเห็นในงานวิจัยส่วนใหญ่ [36],[37],[38],[39] ส่วนสนามแลกเปลี่ยนที่ถูกเลือกให้เป็นประเภทสนามไม่เอกพันธุ์ มีหลายแบบขึ้นอยู่กับแบบจำลองของโมเมนต์แม่เหล็กที่เลือกเทียบกับแกนควอนไทต์ [40],[41] ตัวอย่างสนามแลกเปลี่ยนไม่เอกพันธุ์ที่น่าสนใจ คือ สนามแลกเปลี่ยนชนิดเกลียว (spiral exchange field) ทีได้ศึกษากันอย่างแพร่หลายใน [42],[43],[44],[45]

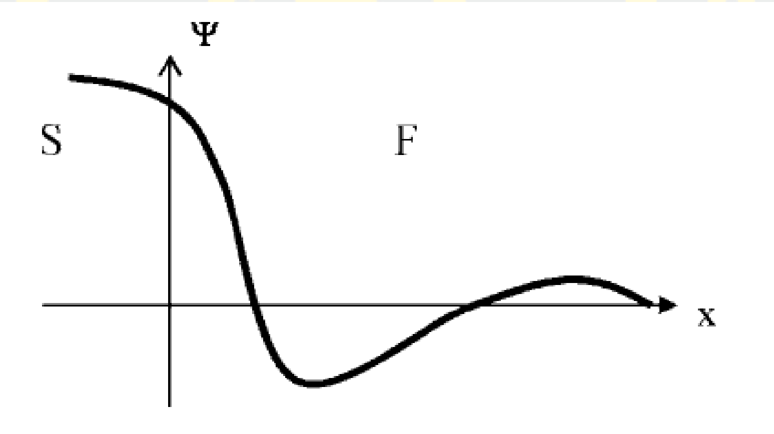
3.3.1 พฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤตในระบบ SC-FM และความไม่เสถียรภาพของสถานะวอร์เทค

ในหัวข้อนี้จะนำวารสารที่ถูกเผยแพร่ในปี ค.ศ. 2007 [35] ถูกเสนอโดย A.V. Samokhvalov, A.S. Mel’nikov และ A.I. Buzdin มาวิจารณ์เพื่อเป็นส่วนเสริมในเนื้อหาของวิทยานิพนธ์เล่มนี้ งานวิจัยที่กำลังอ้างถึงเป็นการนำเสนอกลไกการเกิดสถานะยวดยิ่งที่เกี่ยวพันธ์กับค่าวอร์เทค (vorticities) ที่แทนด้วยเลขวินดิ่ง (winding number) หรือผลเชิงวงโคจร (orbital effect) ของคู่คูเปอร์ที่ทลวงจากชั้น SC ไปยังชั้น FM ในที่นี้จะถูกกำกับด้วยโมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum ; L) กล่าวคือ ทันทีที่คู่คูเปอร์ทลวงเข้าไปยังชั้น FM หรือบริเวณที่มีสนามแลกเปลี่ยน (exchange field ; h) ผลคือ แอมพริจูดของฟังก์ชันคลื่นถูกหน่วง [46] ดังรูปที่ 14 ทำให้อุณหภูมิวิกฤตเปลี่ยนไปหรืออาจเกิดขึ้นที่ภาวะวอร์เทค (vorticity) ต่าง ๆ สิ่งนี้หมายถึง T_c ได้เปลี่ยนสถานะไปสู่สถานะใหม่ เรียกว่า สถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ (inhomogeneous superconducting state) ในที่นี้จะเรียกว่า สถานะวอร์เทค (vortex states)

ต้นกำเนิดของสถานะวอร์เทค (vortex states) ในโครงสร้างไฮบริดจ์ SC-FM มีความสัมพันธ์กับกลไกพื้นฐานของอิทธิพลระหว่างการจัดเรียงตัวนำยวดยิ่งและแม่เหล็กเฟร์โร กลไกแรกที่เกี่ยวข้อง

นั่นคือ ผลเชิงวงโคจร (orbital effect) ของคู่คูเปอร์ ยกตัวอย่างเช่น อันตรกิริยาของคู่คูเปอร์กับโมเมนต์แม่เหล็กที่เกิดจากสนามแม่เหล็กในโลหะเฟร์โร ส่งผลให้สถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ปรากฏ และสถานะวอร์เทคถือกำเนิดขึ้นเองโดยธรรมชาติ กลไกที่สองเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างคู่คูเปอร์กับสนามแลกเปลี่ยน เนื่องด้วยคู่คูเปอร์สามารถทลวงเข้าไปยังชั้นโลหะเฟร์โรและเหนี่ยวนำทำให้เกิดสภาพยวดยิ่งที่บริเวณนั้น [46] ส่งผลให้พฤติกรรมของแอมพริจูดของฟังก์ชันคลื่นคู่คูเปอร์ถูกหน่วง ดังรูปที่ 14

พฤติกรรมดังกล่าวเป็นพฤติกรรมที่น่าสนใจในโครงสร้างไฮบริดจ์ SC-FM ดังนั้น จุดประสงค์ของหัวข้อนี้ คือการศึกษาความไม่เสถียรของสถานะวอร์เทค โดยมุ่งเน้นไปที่การคำนวณหาสูตร อบริโคซอฟ – กอร์คอฟ (Abrikosov – Gor’ kov like - formula) ที่ถูกคำนวณด้วยสมการอูซาเดลเชิงเส้น ท้ายที่สุดจะตีความโดยใช้ประโยชน์จากวิธีคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) เพื่อสรุปพฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤตที่แปรค่าตามรัศมีแกนเฟร์โรในระบบไฮบริดจ์ SC-FM นี้



รูปที่ 14 เมื่อคู่คูเปอร์แทรกซึมจากชั้น SC ไปสู่ชั้น FM พฤติกรรมของฟังก์ชันคลื่นคู่คูเปอร์ Ψ ถูกหน่วงตามการเพิ่มขนาดความหนาชั้นโลหะเฟร์โร x

$$\Psi \sim \sum_{\omega} F(x,\omega) \sim \Delta \exp\left(-x/\xi_{fm}\right)\cos\left(x/\xi_{fm}\right)$$

อ้างอิงกราฟจากงาน [46]

เริ่มพิจารณาโครงสร้างไฮบริดจ์ที่ประกบกันระหว่างตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร ในรูปทรงเรขาคณิตลักษณะทรงกระบอกเชิงสมมาตร ที่มีแกนกลางเป็นแม่เหล็กเฟร์โรล้อมรอบด้วยตัวนำยวดยิ่งผนังบาง และผิวสัมผัสระหว่างโลหะทั้งสองมีสภาพนำไฟฟ้าได้ดี ดังรูปที่ 13 ในที่นี้ให้สมมติเวลาที่

อิเล็กตรอนกระเจิงแบบยืดหยุ่นค่อนข้างน้อยมาก (elastic scettering time ; $\tau \ll 1$) เพื่อให้สามารถพิจารณาภายใต้เงื่อนไขขีดจำกัดสารเจือ (dirty limit) กล่าวคือ เงื่อนไขนี้จะทำให้ $T_c\tau \ll 1$ และ $h\tau \ll 1$ ดังที่กล่าวไปในหัวข้อ 3.1.1 ที่นำมาซึ่งการคำนวณอุณหภูมิวิกฤตได้จากสมการอูซาเดลเชิงเส้น (linearized Usadel equations) ในย่านการเปลี่ยนสถานะยวดยิ่งอันดับสอง (second order phase transition) ดังนั้น จึงเขียนสมการอูซาเดลได้ดังนี้

$$-\frac{D}{2}\nabla^2 F(\mathbf{r},\omega)+\left[\omega+ih(\mathbf{r})\right]F(\mathbf{r},\omega)=\Delta(\mathbf{r}) \tag{3.37}$$

ในระบบทรงกระบอกเชิงสมมาตร ค่าวอร์เทค (vorticities ; L) จะมาพร้อมกับโมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum) ของฟังก์ชันคลื่นคูเปอร์ ขอให้สังเกตรูปที่ 13 จะเห็นได้ว่าแบบจำลองมีลักษณะเป็นทรงกระบอก ด้วยเหตุนี้จึงทำการเลือกพิกัดทรงกระบอก (r,θ,z) มาใช้ในการคำนวณ และสามารถเขียนพจน์ลาปลาเซียน ∇^2 ได้เป็น

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right)+\frac{\partial_\theta^2}{r^2}+\partial_z^2 \tag{3.38}$$

เรขาคณิตรูปร่างทรงกระบอกในแบบจำลอง มีความสมมาตรเชิงมุม (azimuthal symmetry) ด้วยเหตุนี้จึงสามารถแยกส่วนเชิงมุม (angular part) ออกจากส่วนรัศมี (radius part) ของทั้งแอมพริจูดฟังก์ชันคลื่นคู่ $F(\mathbf{r},\omega)$ ที่มีอยู่ในสถานะคลื่นเอสแบบสปินซิงเกลตและพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ $\Delta(\mathbf{r})$ ตามลำดับดังนี้

$$\begin{gathered} F_{fm,sc}(\mathbf{r})=F_{fm,sc}(r,\omega)e^{iL\theta} \\ \Delta(\mathbf{r})=\Delta(r)e^{iL\theta} \end{gathered} \tag{3.39}$$

การแก้สมการอูซาเดลให้สำเร็จลุล่วง ต้องพิจารณาร่วมกับสมการคล้องจองกันในตัว (self-consistent equation) ตามสมการที่ (3.3) ในระหว่างการคำนวณจะใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวนอกและบริเวณรอยต่อของ SC-FM คล้ายกับการแก้หาสูตร อบริโคซอฟ – กอร์คอฟ ในหัวข้อที่ 3.2 ถัดมาพิจารณาสมการอูซาเดลบริเวณ FM ได้จากการแทนสมการที่ (3.39) ลงไปในสมการ (3.37) ทำให้ได้สมการอูซาเดลในหนึ่งมิติเป็น

$$\left(\omega-\frac{D_{fm}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{fm}(r,\omega)+ihF_{fm}(r,\omega)=0 \tag{3.40}$$

โดยที่ $\hat{\pi}_r^2$ คือ ตัวดำเนินการเชิงรัศมี (radial operator) ในบริเวณ FM และพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีค่าเป็นศูนย์เสมอ $(\Delta = 0)$

$$\hat{\pi}_r^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) - \frac{L^2}{r^2}$$

ขอให้สังเกตสมการที่ (3.40) คือ สมการเอกพันธุ์ (homogeneous equation) และพิจารณาในกรณีสนามแลกเปลี่ยนในเฟร์โรแบบเข้ม $(h \gg \pi T_c)$ สามารถละทิ้งเทอม ω กรณีนี้นำมาซึ่งการได้ผลเฉลยของฟังก์ชัน $F_{fm}(r,\omega)$ เป็นเบสเซิลดัดแปลงชนิดที่หนึ่ง (modified Bessel function of the first kind ; $I_\upsilon(x)$)

$$F_{fm}(r,\omega) = I_{|L|}(k_f r) \quad \text{เมื่อ } k_f = \frac{1+i}{\xi_h} \tag{3.41}$$

ภาวะวอร์เทคที่แสดงด้วยพารามิเตอร์ L แฝงอยู่ในอันดับของฟังก์ชันเบสเซิลดัดแปลง จึงนำมาสู่การคาดการว่า พฤติกรรมของฟังก์ชันคลื่นบริเวณ FM เปลี่ยนไปหาก L เปลี่ยน และด้วยเหตุผลที่ผลเฉลยไม่มีฟังก์ชันเบสเซิลดัดแปลงชนิดที่สอง (modified Bessel function of second kind ; K) เพราะขีดจำกัดของรูปทรงเรขาคณิตที่วิเคราะห์มีลักษณะลู่เข้าที่จุดกำเนิด แต่พฤติกรรมของฟังก์ชันเบสเซิลดัดแปลงชนิดที่สองมีพฤติกรรมลู่ออกที่จุดกำเนิด ด้วยเหตุนี้จึงสามารถละทิ้งได้ฟังก์ชันดังกล่าวได้ พารามิเตอร์ ξ_h ถูกเรียกว่า ความยาวแลกเปลี่ยน (exchange lentgh) หรือความยาวที่แปรผันในโลหะ FM ที่มีขนาดเป็น $\xi_h = \sqrt{D_{fm}/h}$

จากนั้นทำการคำนวณหาฟังก์ชันขอบเขต (boundary function ; W) โดยใช้ประโยชน์จากเงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อของ SC-FM (interface boundary condition) ที่ว่า

$$\begin{aligned} \nabla F_{sc} &= \frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{sc}} \nabla F_{fm} \\ F_{sc} &= F_{fm} + \gamma_b \xi_{fm} \nabla F_{fm} \end{aligned} \tag{3.42}$$

นำทั้งสองหารกันจะพบว่า

$$\nabla F_{sc}\big|_{r=d_f} = W F_{sc}\big|_{r=d_f} \tag{3.43}$$

เมื่อ

$$W = \left.\frac{\left(\sigma_{fm}/\sigma_{sc}\right)\nabla F_{fm}}{F_{fm}+\gamma_b \xi_{fm}\nabla F_{fm}}\right|_{r=d_f} \tag{3.44}$$

พิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F_{fm}\left(r,\omega\right)$ในสมการที่ (3.41) จะได้

$$\left.\frac{d}{dr}F_{fm}\right|_{r=d_f} = k_f I'_{|L|}\left(k_f d_f\right) \tag{3.45}$$

เมื่อ $I'_{|L|}$ คือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันเบสเซลดัดแปลงชนิดที่หนึ่ง ที่มีอาร์กิวเมนต์เป็น $k_f d_f$ และขอให้สังเกตว่าฟังก์ชัน F_{fm} ขึ้นต่อส่วนรัศมีเพียงตัวเดียว กล่าวคือ พจน์เกรเดียนต์กลายเป็นอนุพันธ์เชิงรัศมีเท่านั้น$\left(\nabla F_{fm} = \frac{d}{dr}F_{fm}\right)$ จากนั้นให้นำสมการที่ (3.45) แทนกลับลงไปยังสมการที่ (3.44) แล้วใช้ความสัมพันธ์ $I'_{|L|}\left(k_f d_f\right) = \frac{|L|}{k_f d_f} I_{|L|}\left(k_f d_f\right) + I_{|L|+1}\left(k_f d_f\right)$ ทำให้ได้ฟังก์ชันขอบเขตเป็น

$$W = \frac{\left(\sigma_f/\sigma_s\right)\kappa_L}{d_f+\gamma_b\xi_{fm}\kappa_L} \qquad \text{เมื่อ } \kappa_L = |L| + \left(k_f d_f\right)\frac{I_{|L|+1}\left(k_f d_f\right)}{I_{|L|}\left(k_f d_f\right)} \tag{3.46}$$

ฟังก์ชันขอบเขตจะถูกใช้ภายหลังการหาผลเฉลยของ $F_{sc}\left(r,\omega\right)$ในบริเวณตัวนำยวดยิ่ง ดังนั้นขั้นตอนต่อไป คือการแก้สมการอูซาเดลในบริเวณตัวนำยวดยิ่ง $\left(d_f < r < d_f + d_s\right)$ สำหรับบริเวณตัวนำยวดยิ่ง สมการที่ (3.37) ถูกเขียนในรูปหนึ่งมิติได้เป็น

$$\left(\omega - \frac{D_{sc}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{sc}\left(r,\omega\right) = \Delta\left(r\right) \tag{3.47}$$

ใช้วิธีการประมาณโหมดเดียว (single-mode approximation ; SMA) ตาม Ansatz [47]

$$F_{sc}\left(r,\omega\right) = \frac{\Delta\left(r\right)}{\omega + 2\pi T\Omega_L} \tag{3.48}$$

จากวิธีการประมาณโหมดเดียว ทำให้สมการที่ (3.47) ถูกเขียนเป็น

$$\frac{d^2}{dr^2}F_{sc}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}F_{sc}+\left(\alpha^2-\frac{L^2}{r^2}\right)F_{sc}=0 \tag{3.49}$$

เมื่อ $\alpha^2=4\pi T\Omega_L/D_{sc}$ และตามสมการคล้องจองกันในตัว (self-consistent equation) กับวิธีการประมาณโหมดเดียว จะให้ผลโดยตรงตามสูตร อบริโคซอฟ – กอร์คอฟ (Abrikosov – Gor' kov like formula)

$$\ln\frac{T}{T_{cs}}=\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Re}\,\psi\left(\frac{1}{2}+\Omega_L\right) \tag{3.50}$$

ค่าสูงสุดของ T จะให้อุณหภูมิวิกฤต T_c ที่ต้องการ และพารามิเตอร์การแตกคู่ Ω_L ที่ปรากฏในฟังก์ชันไดแกมมา (digamma function ; $\psi(x)$) [48] จะถูกคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณผิวนอก $r=d_f+d_s$ และบริเวณรอยต่อ $r=d_f$ เขียนตามลำดับได้ดังนี้

$$\left.\frac{d}{dr}F_{sc}\right|_{r=d_f+d_s}=0 \tag{3.51}$$

$$\left.\frac{d}{dr}F_{sc}\right|_{r=d_f}=WF_{sc}\big|_{r=d_f} \tag{3.52}$$

และผลเฉลยทั่วไปของฟังก์ชัน $F_{sc}(r,\omega)$ ในสมการที่ (3.49) จะเป็นฟังก์ชันเบสเซิล (Bessel functions)

$$F_{sc}(r,\omega)=AJ_L(\alpha r)+BN_L(\alpha r) \tag{3.53}$$

เมื่อ J_L และ N_L คือ ฟังก์ชันเบสเซิลอันดับ L ชนิดที่หนึ่ง (Bessel function of the first kind) และฟังก์ชันเบสเซิลอันดับ L ชนิดที่สอง (Bessel function of the second kind) มีชื่อเรียกว่า ฟังก์ชันนอยมันน์ (Neumann function) ตามลำดับ ในขณะที่ความสัมพันธ์ของค่าคงที่ A และ B ถูกหาโดยเงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อ $r=d_f$

$$B=-A\frac{\left[\alpha J_L'(\alpha d_f)-WJ_L(\alpha d_f)\right]}{\alpha N_L'(\alpha d_f)-WN_L(\alpha d_f)} \tag{3.54}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตบริเวณผิวนอก $r=d_f+d_s$ ทำให้ได้สมการค่าไอเกน (eigen value equation)

$$U(\alpha)N_L'\left[\alpha\left(d_f+d_s\right)\right]-V(\alpha)J_L'\left[\alpha\left(d_f+d_s\right)\right]=0 \tag{3.55}$$

โดยที่

$$U(\alpha)=\alpha J_L'\left(\alpha d_f\right)-WJ_L\left(\alpha d_f\right) \tag{3.56}$$

$$V(\alpha)=\alpha N_L'\left(\alpha d_f\right)-WN_L\left(\alpha d_f\right) \tag{3.57}$$

เมื่อ J_L' และ N_L' คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง ตามลำดับ

ขั้นตอนต่อไป ทำการหารากของสมการที่ (3.55) โดยตระหนักว่า ค่าไอเกนต่ำสุดจะให้ค่าอุณหภูมิวิกฤต T_c จึงทำการหาค่าต่ำสุด ด้วยวิธีการหาค่าต่ำสุด (method of minimization) กล่าวคือ ทำการอนุพันธ์สมการที่ (3.55) เทียบ α จากนั้นให้คำนึงถึงการวิเคราะห์ขีดจำกัดเปลือกตัวนำยวดยิ่งมีลักษณะบาง $\left(d_s/d_f<1\right)$ ท้ายที่สุดจะได้ค่าไอเกนต่ำสุด (lowest eigenvalue) เป็น

$$\alpha^2=\frac{L^2}{d_f^2}+\frac{W}{d_s} \tag{3.58}$$

หากแทน $\alpha^2=4\pi T\Omega_L/D_{sc}$ แล้วจะพบพารามิเตอร์แตกคู่ (depairing parameter)

$$\Omega_L=\frac{T_{cs}}{2T_c}\xi_s^2\left[\frac{L^2}{d_f^2}+\frac{W}{d_s}\right] \tag{3.59}$$

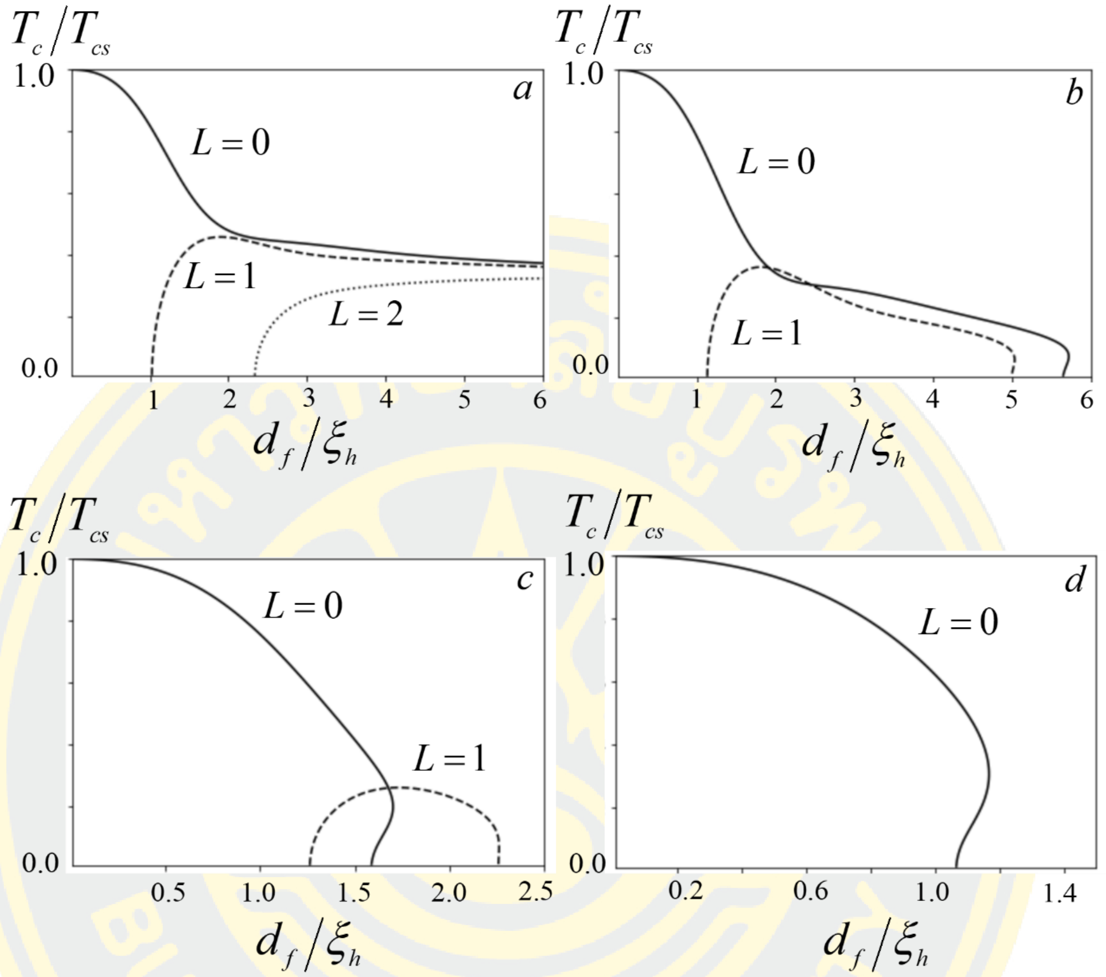
โดยฟังก์ชันขอบเขต W ถูกกำหนดไว้ในสมการที่ (3.46) และในงานนี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $\gamma_b=0$

ขั้นตอนสุดท้ายคือการใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) ในการบรรยายพฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤต โดยจะพล็อตความสัมพันธ์ระหว่าง T_c/T_{cs} กับ d_f/ξ_h และเลือกค่าของอัตราส่วนความนำไฟฟ้า SC ต่อ FM ทั้งหมดสี่ค่า ได้แก่ 3, 2.7, 2.5 และ 2 ดังรูปที่ 15(a), 15(b), 15(c) และ 15(d) ตามลำดับ ทั้งนี้พารามิเตอร์ตัวอื่น ๆ ถูกบังคับให้มีค่าเดียวตลอดการคำนวณ ขอให้สังเกตบางอย่างจากกราฟที่ได้ จากรูปที่ 14(a) เมื่อรัศมีแกนโลหะเฟร์โรมีค่าน้อยมาก ๆ $d_f \ll \xi_h$ มีเพียงสถานะเดียวที่ได้ค่าที่พึงพอใจ (energetically favorable) คือ สถานะที่เลขวินดิ่งเป็นศูนย์ $L=0$ หรือที่เรียกกันว่า สถานะวอร์เทคอิสระ (vortex free states) เนื่องจากอุณภูมิวิกฤตในแผ่นประกบนี้ จะต้องเป็นอุณหภูมิที่วัดค่าได้สูงสุด ด้วยเหตุนี้จึงละทิ้งสถานะที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า นั่นคือ ทุก

ช่วงของรัศมีแกนเฟร์โร $T_c(L=0) > T_c(L>0)$ แสดงว่า ค่าพารามิเตอร์สำหรับรูปที่ 14(a) อุณหภูมิวิกฤตในสถานะ $L>0$ จะถูกบดบัง เนื่องจากพลังงานกระแสยวดยิ่ง (supercurrent energy) ของคู่คูเปอร์มีค่ามาก ทำให้อุณหภูมิวิกฤตปรากฏในสถานะวอร์เทคอิสระเท่านั้น และจะสังเกตเห็นค่าอุณหภูมิวิกฤตที่ใกล้กับอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งเชิงปริมาตร $T_c/T_{cs} \approx 1$ เหตุผลก็คือการวิเคราะห์ $d_f \ll \xi_h$ ในที่นี้ คือ อิทธิพลแผ่นประกบแบบอ่อน (weak proximity effect)

เหนือสิ่งอื่นใด หากพิจารณาในย่านที่รัศมีแกนเฟร์โรมีค่ามาก $d_f > \xi_h$ ส่งผลให้ T_c ในสถานะ $L=0$ ถูกหน่วงแอมพริจูด และลดพลังงานจลน์ของกระแสยวดยิ่งในสถานะ $L \neq 0$ ผลก็คือ อุณหภูมิวิกฤต T_c จะปรากฏในสถานะที่เลขวินดิ่งมากกว่าศูนย์ $T_c(L>0) > T_c(L=0)$ ภายใต้เงื่อนไขอัตราส่วนของความนำไฟฟ้า SC ต่อ FM พอเหมาะ กล่าวคือ อิทธิพลแผ่นประกบแบบเข้ม (strong proximity effect) เป็นผลให้คู่คูเปอร์สามารถคงอยู่ในสถานะ $L>0$ ได้ เรียกสถานะนี้ว่า สถานะวอร์เทค (vortex states) ที่พบได้อย่างชัดแจ้งตามเส้นประ ดังรูปที่ 14(c) ขอให้สังเกตช่วงแกนรัศมีเฟร์โรอยู่ระหว่าง 1.7 ถึง 2.25 (ค่าประมาณ) $1.7 \leq d_f/\xi_h \leq 2.25$ ที่ปรากฏค่าสูงสุดของอุณหภูมิวิกฤตตามค่าอัตราส่วนความนำไฟฟ้าเท่ากับ 2.5 และหากเลือกให้ความนำไฟฟ้าน้อยสุดจากสี่ค่าที่เลือกมาที่แสดงในรูป 14(d) จะไม่พบสถานะวอร์เทค หรือพบเพียงสถานะวอร์เทคอิสระเท่านั้น

จึงสรุปได้ว่า ปรากฏการณ์การผลัดเปลี่ยน (switching phenomena) ในระบบแผ่นประกบไฮบริดจ์ SC-FM ที่ก่อเกิดสถานะวอร์เทค (vortex states) เป็นผลมาจากสนามแลกเปลี่ยน (exchange field) จากโมเมนต์แม่เหล็กใน FM เกี่ยวข้องโดยตรงกับพฤติกรรมการหน่วงแอมพริจูดของฟังก์ชันคลื่นคูเปอร์ที่ทลวงเข้าไปยังชั้นแม่เหล็กเฟร์โร การวิเคราะห์เงื่อนไขสนามเข้ม (strong exchange field) หรือรัศมีเฟร์โรมากกว่าความยาวแลกเปลี่ยน $(d_f > \xi_h)$ และลดพลังงานกระแสยวดยิ่งจะบดบังสถานะวอร์เทคอิสระและนำมาสู่การก่อเกิดสถานะวอร์เทค (vortex states) ภายใต้เงื่อนไขค่าอัตราส่วนของความนำไฟฟ้า SC ต่อ FM ที่พอเหมาะ เป็นปัจจัยสำคัญในการควบคุมสถานการณ์ในการก่อเกิดสถานะวอร์เทค อย่างไรก็ดี การกำหนดค่าต่าง ๆ ของพารามิเตอร์ในระบบเพื่อสังเกตปรากฏการณ์การผลัดเปลี่ยนก็เป็นสิ่งสำคัญและควรกำหนดให้ใกล้เคียงกับความจริงมากที่สุด เพื่อนำไปยืนยันความถูกต้องจากผลการทดลอง



รูปที่ 15 แสดงถึงความไม่เป็นอิสระของ T_c ในแกนโลหะเฟร์โรที่แปรค่าตามรัศมีเฟร์โร d_f ในตัวแปรไร้หน่วย ด้วยค่าต่าง ๆ ของภาวะวอร์เทค (vorticity) ที่แทนด้วยลำดับ L โดยที่ $L=0$ (เส้นทึบ) $L=1$ (เส้นประ) และ $L=2$ (เส้นจุด) ในขณะที่พารามิเตอร์ต่าง ๆ ถูกเลือกให้มีค่าดังนี้ $d_s/\xi_{sc}=0.5$, $\xi_{sc}/\xi_h=0.28$ และอัตราส่วนความนำไฟฟ้า $\left(\sigma_{sc}/\sigma_{fm}\right)$: (a) 3, (b) 2.7, (c) 2.5 และ (d) 2

การสืบสวนเชิงทฤษฎีในระบบไฮบริดจ์ SC-FM รูปทรงเรขาคณิตยังคงดำเนินต่อไปอย่างต่อเนื่อง คำถามที่ยังไม่มีการวิเคราะห์ในตอนนั้น คือ จะเป็นอย่างไร หากพิจารณาระบบนี้ผ่านปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค (Little-Parks effect) [33],[34] กล่าวคือ การประยุกต์สนามแม่เหล็กภายนอก (external magnetic field ; $\mathbf{H}$) ในทิศทางตั้งฉากกับระนาบของทรงกระบอก เพื่อสังเกตพฤติกรรมการสั่นของอุณหภูมิวิกฤตตามการแปรค่าของฟลักซ์ซอยด์สัมพัทธ์ งานดังกล่าวถูกเผยแพร่ในปี ค.ศ. 2009 เป็นวารสารใน Physical Review B [49] หัวข้อ Little-Parks Oscillations in

Hybrid Ferromagnet-Superconductor Systems ที่เสนอโดย A.V. Samokhavalov, A.S. Mel'nikov, J.P. Ader และ A.I. Buzdin จะวิจารณ์อย่างละเอียดในหัวข้อ 3.3.2

3.3.2 การสั่นของอุณหภูมิวิกฤตในระบบไฮบริดจ์ SC-FM ผ่านปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค

เพื่อให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีความสมบูรณ์ที่สุดจึงจำเป็นที่จะต้องวิจารณ์เนื้อความวารสารฉบับนี้ [49] เนื่องจากการใช้แบบจำลองที่เหมือนกันและเป็นที่ทราบในเบื้องต้นสำหรับปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค ที่ว่าเป็นปรากฏการณ์การสั่นของอุณหภูมิวิกฤตที่แปรค่าตามฟลักซ์ซอยด์ [33] ที่ใช้อธิบายคุณสมบัติแม่เหล็กในตัวนำยวดยิ่งแบบหลายเชิง (multiply-connected superconductor) [34] โดยดั้งเดิมการศึกษาตัวอย่าง SC-NM จะพบว่าอุณหภูมิวิกฤต T_c มีภาวะคาบคงที่ ขึ้นกับจำนวนเต็มเท่าของฟลักซ์แม่เหล็ก $hc/2e$ และหากเปลี่ยนมาวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นประกบ SC-FM จะเป็นอย่างไร คำตอบจะแฝงอยู่ในรายละเอียดของหัวข้อนี้

เริ่มจากการวิเคราะห์แบบจำลองในงานนี้ คือ ระบบแผ่นประกบระหว่างตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โรรูปทรงกระบอกเชิงสมมาตรร่วมแกน โดยมีแกนกลางเป็นแม่เหล็กเฟร์โรที่ถูกล้อมรอบด้วยตัวนำยวดยิ่งผนังบางและผิวสัมผัสระหว่างโลหะทั้งสองมีสภาพนำไฟฟ้าได้ดี ดังรูปที่ 13 ทั้งนี้ทรงกระบอกร่วมแกนดังกล่าวถูกประยุกต์เข้ากับสนามแม่เหล็กภายนอกที่มีความเข้มคงตัวและมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบของทรงกระบอก การคำนวณเชิงวิเคราะห์จะมุ่งเน้นไปที่การคำนวณสูตรอบริโคซอฟ – กอร์คอฟ (Abrikosov – Gor' kov like - formula) เพื่อนำมาบรรยายพฤติกรรมการสั่นของอุณหภูมิวิกฤต T_c และเช่นเดิม การคำนวณถูกพิจารณาภายใต้เงื่อนไขขีดจำกัดสารเจือ (dirty-limit) กล่าวคือ การคำนวณอยู่ในกรอบสมการอูซาเดลเชิงเส้น (linearized Usadel equations) ในย่านการเปลี่ยนเฟสอันดับสอง (second order phase transition) ตามสมการที่ (3.37) ยิ่งไปกว่านั้น การมีอยู่ของสนามแม่เหล็กภายนอก $\mathbf{H}$ ทำให้พจน์เกรเดียนต์ (gradient ; ∇) ถูกเขียนในรูปเกจ – อินเวร์เรียนต์ (gauge – invariant ; $\nabla - 2\pi i\mathbf{A}/\Phi_0$) เนื่องจากในระบบที่กำลังพิจารณามีสนามแม่เหล็กภายนอก $\mathbf{H} = H\hat{z}$ ผลคือ ศักย์เวกเตอร์ (vector potential ; $\mathbf{A}$) มีขนาดเท่ากับ $\mathbf{A} = rH/2\hat{\theta}$ อย่างไรก็ดี การที่พิจารณาบริเวณ FM ที่เป็นภาวะแม่เหล็กจะมาพร้อมกับผลจากความเป็นแม่เหล็ก (magnetization ; $\mathbf{M}$) และเนื่องด้วย $\mathbf{M}$ มีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับ $\mathbf{H}$ จึงทำให้สนามเหนี่ยวนำ $\mathbf{B}$ ถูกประมาณให้เหลือเพียงสนามภายนอก $\mathbf{H}$ ตามความสัมพันธ์ $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ กล่าวคือ

ผลจากความเป็นแม่เหล็กจะไม่มีผลต่อการวิเคราะห์ปัญหานี้ โดยที่ $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ คือ ฟลักซ์เชิงควอนตัม (flux quantum) และเลือกใช้พิกัดทรงกระบอก (r,θ,z) พจน์ลาปลาเซียน ∇^2 จะถูกกำหนดไว้ในสมการที่ (3.38) พร้อมใช้ประโยชน์จากแบบจำลองที่มีความสมมาตรเชิงมุม ด้วยการแยกส่วนเชิงมุมออกจากส่วนรัศมี ตามสมการที่ (3.39) ดังนั้น บริเวณโลหะเฟร์โร $0<r<d_f$ สมการอูซาเดลในสมการที่ (3.37) จะลดรูปเป็นสมการหนึ่งมิติ

$$\left(\omega - \frac{D_{fm}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{fm}(r,\omega) + ihF_{fm}(r,\omega) = 0 \tag{3.60}$$

โดยที่ $\hat{\pi}_r^2$ คือ ตัวดำเนินการเชิงรัศมี (radial operator) และพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในบริเวณโลหะเฟร์โร มีค่าเป็นศูนย์เสมอ $(\Delta = 0)$

$$\hat{\pi}_r^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) - \frac{1}{r^2}\left(L - \frac{r^2}{2a_H^2}\right)^2 \tag{3.61}$$

เมื่อ $a_H = \sqrt{\Phi_0/2\pi H}$ ถูกเรียกว่า ความยาวแม่เหล็ก (magnetic length) ในการพิจารณากรณีสนามเข้ม $h \gg \pi T_c$ สามารถละทิ้งพจน์ ω ที่จะนำมาสู่วิธีการหาผลเฉลยของ F_{fm} ผ่านการประมาณเชิงเส้นกำกับ (asymptotic approximation) กล่าวคือ ในกรณีที่ ϕ มีค่ามาก ๆ ฟังก์ชัน $F_{fm}^{>} \simeq e^{-\phi/2}$ และหาก ϕ มีค่าน้อย ๆ ฟังก์ชัน $F_{fm}^{<} \simeq \phi^{|L|/2}$ ดังนั้น ผลเฉลยของฟังก์ชัน $F_{fm}(r,\omega)$ ในสมการที่ (3.60) ถูกแสดงผ่านฟังก์ชันคอนฟลูเอนท์ไฮเปอร์จีโอเมทริกชนิดที่หนึ่ง (confluent hypergeometric function of the first kind ; $\Phi(a,b,\phi)$) หรือที่เรียกกันอีกชื่อคือ ฟังก์ชันคูมเมอร์ (Kummer's function) [50]

$$F_{fm}(r) = C\phi^{|L|/2}e^{-\phi/2}\Phi(a_L, L+1, \phi) \tag{3.62}$$

เมื่อ ϕ คือ ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กภายนอก H ที่ขดเป็นวงในรัศมี r ที่ถูกวัดในหน่วยของฟลักซ์เชิงควอนตัม Φ_0

$$\phi = 2\pi r A_\theta/\Phi_0 = r^2/2a_H^2$$

ในที่นี้ พารามิเตอร์ $a_L = \frac{1}{2}\left[|L| - L + 1 + a_H^2\left(2i/\xi_h^2\right)\right]$ คือ ปริมาณเชิงซ้อนจากภาวะวอร์เทค เมื่อ $\xi_h = \sqrt{D_{fm}/h}$ คือ ความยาวของสนามแลกเปลี่ยน (exchange length) ที่เป็นบทบาทสำคัญในการ

หน่วงแอมพริจูดของฟังก์ชันคลื่นคู่ในชั้นโลหะเฟร์โร และด้วยเหตุผลที่ผลเฉลยไม่มีฟังก์ชันคอนฟลูเอนท์ไฮเปอร์จีโอเมทริกชนิดที่สอง (confluent hypergeometric function of the second kind ; $\Psi(a,b,\phi)$) เพราะว่า เรขาคณิตที่พิจารณามีลักษณะลู่เข้าที่จุดกำเนิด แต่พฤติกรรมของฟังก์ชันชนิดที่สองนี้ มีพฤติกรรมลู่ออกที่จุดกำเนิด ขั้นตอนต่อไปจะทำการเขียนรูปแบบฟังก์ชันขอบเขต (boundary function ; W) โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตคูพริยานอฟ – ลูคิเซฟ [30] ที่บริเวณรอยต่อ $r = d_f$ ระหว่าง SC-FM ตามสมการที่ (3.42) จึงได้ ฟังก์ชันขอบเขตเป็น

$$W = \frac{(\sigma_{fm}/\sigma_{sc})\kappa_L}{d_f + \gamma_b \xi_f \kappa_L} \quad \text{เมื่อ} \quad \kappa_L = |L| - \phi_f + 2\phi_f \frac{a_L}{|L|+1} \frac{\Phi(a_L+1,|L|+2,\phi_f)}{\Phi(a_L,|L|+1,\phi_f)} \tag{3.63}$$

เมื่อ $\phi_f = d_f^2/2a_H^2$ คือ ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กภายนอกที่ปิดล้อมโลหะเฟร์โร

พิจารณาสมการอูซาเดลในบริเวณ SC ได้จากการแทนสมการที่ (3.39) ลงในสมการที่ (3.37) จะได้

$$\left(\omega - \frac{D_{sc}}{2}\hat{\pi}_r^2\right) F_{sc}(r,\omega) = \Delta(r) \tag{3.64}$$

สมการที่ (3.64) จะถูกแก้สมการโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณผิวนอก $r = d_f + d_s$(outer surface) กับพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบตามเงื่อนไขคล้องจองกันในตัว (self-consistency condition) ยิ่งไปกว่านั้น หากวิเคราะห์กรณีตัวนำยวดยิ่งเปลือกบาง (หรือสมมติให้ $d_s \ll \xi_s$) ที่ทำให้การผันแปรของฟังก์ชัน $F_{sc}(r,\omega)$ และ $\Delta(r)$ ไม่ขึ้นกับรัศมี r อีกต่อไป ที่จะนำมาสู่การหาผลเฉลย $F_{sc}(\omega)$ ด้วยการใช้วิธีการอินทิเกรตสมการที่ (3.64) ตลอดทั้งเปลือกของตัวนำยวดยิ่ง ท้ายที่สุดจะได้ $F_{sc}(\omega)$ ในรูปแบบการประมาณโหมดเดียว (single mode approximation ; SMA) [47]

$$F_{sc}(\omega) = \frac{\Delta}{\omega + \frac{D_{sc}}{2}\left[\left(\frac{L-\phi_f}{d_f}\right)^2 + \frac{W}{d_s}\right]} \tag{3.65}$$

นำสมการที่ (3.65) แทนลงในสมการคล้องจองกันในตัวตามสมการที่ (3.3) และใช้ประโยชน์จากฟังก์ชันไดแกมมา (digamma function ; ψ) ทำให้ได้สูตรคำนวณอุณหภูมิวิกฤตที่เป็นไปตามสูตรอบริโคซอฟ – กอร์คอฟ (Abrikosov – Gor’ kov like - formula)

$$\ln\frac{T}{T_{cs}}=\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Re}\,\psi\left(\frac{1}{2}+\Omega_L\left(\phi_f\right)\right) \qquad (3.66)$$

โดยปรกติอุณหภูมิวิกฤต T_c จะถูกกำหนดโดยค่าสูงสุดของ T และพารามิเตอร์การแตกคู่ (depairing parameter)

$$\Omega_L\left(\phi_f\right)=\frac{1}{2}\frac{T_{cs}}{T}\xi_{sc}^2\left[\left(\frac{L-\phi_f}{d_f}\right)^2+\frac{W}{d_s}\right] \qquad (3.67)$$

มีหน้าที่ทำลายความเป็นสภาพยวดยิ่งจากผลเชิงวงโคจร (orbital effect) และผลจากการแลกเปลี่ยน (exchange effect)

ขั้นตอนสุดท้ายจะใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) เพื่อบรรยายพฤติกรรมการกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤต T_c เริ่มจากวิเคราะห์กรณีที่สนามแม่เหล็กภายนอกเป็นศูนย์ (zero field) โดยมุ่งเน้นไปที่ผลของ γ_b ที่ส่งผลกับพฤติกรรม T_c/T_{cs} ที่ขึ้นกับ d_f/ξ_h กล่าวคือในกรณี $H=0$ ซึ่งทำให้ $a_H\to\infty$ (หรือ $\phi=0$) จึงใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expressions) แก่ฟังก์ชัน $\Phi(a,b,z/a)$ และหากค่า b และ z ถูกจำกัดแล้วฟังก์ชัน $\Phi(a,b,z/a)$ จะมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเบสเซิลดัดแปลงชนิดที่หนึ่ง $I_\upsilon(x)$ เป็น

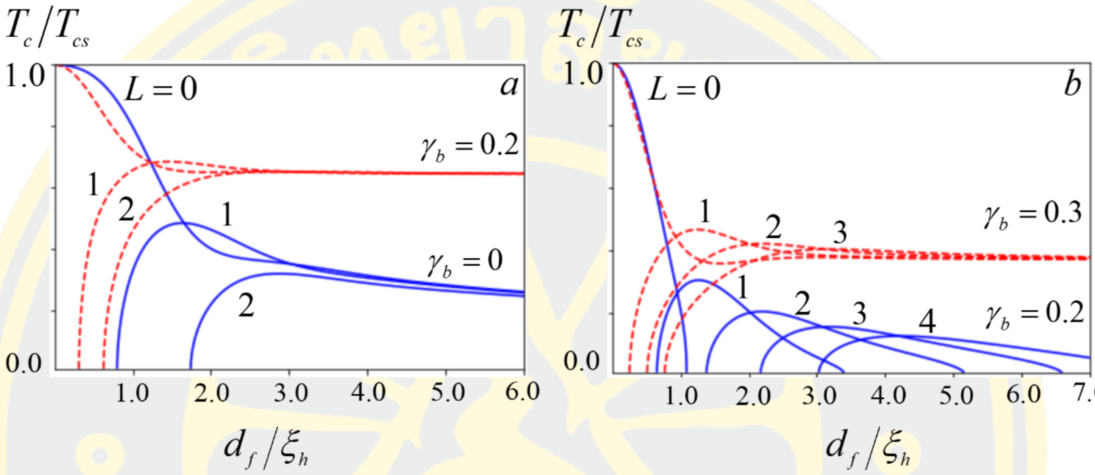
$$\lim_{a\to\infty}\left[\Phi(a,b,z/a)\big/\Gamma(b)\right]=z^{(1-b)/2}I_{b-1}\left(2\sqrt{z}\right)$$

ในที่นี้ $\Gamma(x)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา (gamma function)

หากนำไปวิเคราะห์พจน์ κ_L ในสมการที่ (3.63) จะเปลี่ยนรูปไปสู่

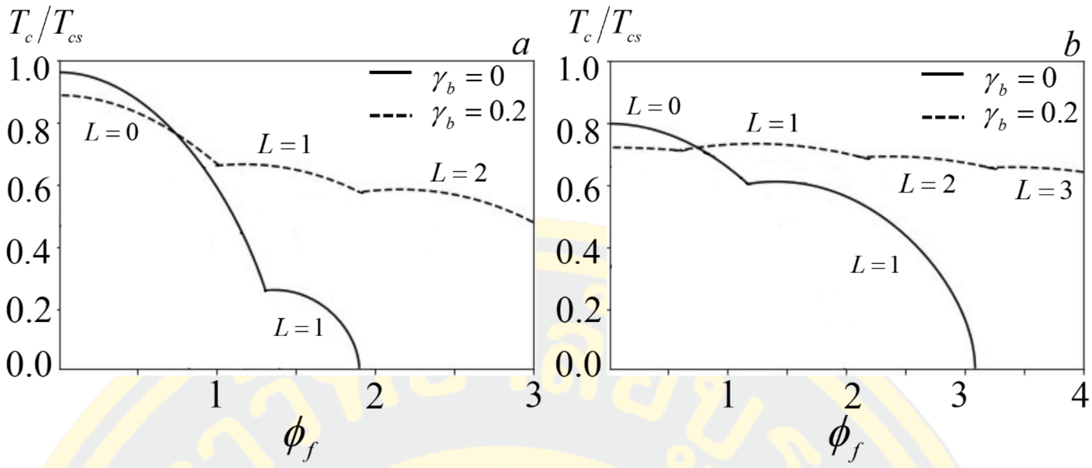
$$\kappa_L(\phi)\big|_{\phi=0}=|L|+u_f\frac{I_{|L|+1}\left(u_f\right)}{I_{|L|}\left(u_f\right)} \quad \text{เมื่อ} \quad u_f=\frac{d_f}{\xi_h}(1+i) \qquad (3.68)$$

ในรูปที่ 16 แสดงตัวอย่างความไม่เป็นอิสระของอุณหภูมิวิกฤต T_c ตามการแปรผันต่อรัศมีทรงกระบอกแม่เหล็กเฟร์โร d_f ด้วยค่าต่าง ๆ สภาพต้านทานไฟฟ้าบริเวณรอยต่อ (boundary resistivity ; γ_b) หรือที่เรียกว่า ผนังรอยต่อ (interface barrier) ซึ่งเห็นได้ว่าหากรัศมี FM มีขนาดเล็ก $d_f/\xi_h\ll 1$ จะมีเฉพาะสถานะที่ $L=0$ ปรากฏค่าสูงสุดของอุณหภูมิ หรือเกิดค่าที่พึงพอใจ (energetically favorable) ยิ่งไปกว่านั้น ค่าอุณหภูมิวิกฤตจะใกล้กับอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งเชิงปริมาตร $T_c/T_{cs} \approx 1$ เนื่องจากอิทธิพลแผ่นประกบแบบอ่อน (weak proximity effect) สำหรับสถานะวอร์เทค $L \geq 1$ ค่า T_c จะถูกระงับ เพราะผลเชิงโคจรขนาดใหญ่ (large orbital effect)



รูปที่ 16 แสดงถึงความไม่เป็นอิสระของอุณหภูมิวิกฤต T_c ตามการแปรค่าของรัศมีแกนโลหะเฟร์โร d_f ในขีดจำกัดสนามภายนอกเป็นศูนย์ $H=0$ ด้วยค่าต่าง ๆ ของผนังรอยต่อ โดยตัวเลขที่ใกล้เส้นโค้งบ่งบอกภาวะวอร์เทค L ต่าง ๆ ในที่นี้ พารามิเตอร์ถูกเลือกให้มีค่าดังนี้ : (a) $d_s/\xi_{sc} = 0.5$, $\xi_{sc}/\xi_h = 0.1$, $\xi_{fm}/\xi_h = 4.0$, $\sigma_{sc}/\sigma_{fm} = 1$ และ (b) $d_s/\xi_{sc} = 0.5$, $\xi_{sc}/\xi_h = 0.02$, $\xi_{fm}/\xi_h = 4.0$, $\sigma_{sc}/\sigma_{fm} = 0.1$

ถัดมาวิเคราะห์การเพิ่มรัศมีเฟร์โร d_f ในสถานะวอร์เทคอิสระ $L=0$ ส่งผลให้ อุณหภูมิวิกฤต T_c ถูกหน่วงลง และลดพลังงานจลน์ของกระแสยวดยิ่งที่จะก่อเกิดสถานะวอร์เทค $L \geq 1$ ในที่สุด สิ่งที่น่าสนใจคือ ในกรณีที่รัศมีเฟร์โรมีขนาดเล็ก $d_f < \xi_h$ หากเพิ่ม γ_b ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $\gamma_b \xi_f d_f < \xi_h^2$ [46] อุณหภูมิวิกฤตในโหมดวอร์เทคอิสระ $L=0$ จะลดลง พฤติกรรมที่ขัดกับสามัญสำนึก (counterintuitive behavior) ดังกล่าว อาจอธิบายได้ว่า หากคู่คูเปอร์ทลวงเข้าไปยังผนัง FM ด้วยระยะที่ตื้น (low penetration of barrier) แล้วจะขัดขวางการกลับไปสู่ชั้น SC หมายความว่า การที่พลังงานแลกเปลี่ยนในชั้น FM น้อย ทำให้คู่คูเปอร์สามารถมีพลังงานเพียงพอที่จะคงอยู่ในชั้น FM ได้เป็นเวลานาน



รูปที่ 17 แสดงถึงการกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤตในปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค ด้วยค่าต่าง ๆ ของผนังรอยต่อ γ_b : $\gamma_b = 0$ (เส้นทึบ) และ $\gamma_b = 0.2$ (เส้นประ) โดยตัวเลขใกล้เส้นโค้งบ่งบอกค่าต่าง ๆ ของภาวะวอร์เทค ในที่นี้พารามิเตอร์วัสดุถูกเลือกให้มีค่าดังนี้ : $d_s/\xi_{sc} = 0.5$, $\xi_{sc}/\xi_h = 0.1$, $\xi_{fm}/\xi_h = 4.0$, $\sigma_{sc}/\sigma_{fm} = 1$ ด้วยรัศมีแกนเฟร์โร d_f/ξ_h : (a) 0.5, (b) 1.0

สำหรับการมีอยู่ของสนามแม่เหล็กภายนอกจะพล็อตกราฟอุณหภูมิวิกฤตตามการแปรค่าของฟลักซ์ซอยด์สัมพัทธ์ตามปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค ดังรูป ที่ได้จากสมการที่ (3.66) และ (3.67) ด้วยค่าต่าง ๆ ของรัศมีเฟร์โร d_f และเนื่องจากความสมมาตรเชิงขอบเขตเฟส (phase boundary) ทำให้สนามแม่เหล็กที่มีทิศทางตรงกันข้ามจะให้ค่าอุณหภูมิเท่ากัน $T_c(-H) = T_c(H)$ ในที่นี้แสดงค่าบวกของสนามแม่เหล็กภายนอกเท่านั้น จากรูป 17 (a),(b) เลือกรัศมีทรงกระบอก FM มีขนาดเล็ก อิทธิพลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนแบบอ่อน ขอบเขตเฟส $T_c(H)$ แสดงลักษณะการสั่นเชิงกึ่งคาบ (quasiperiodic oscillations) ตามฟังก์ชันของสนามแม่เหล็กที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับเส้นโค้ง $T_c(H)$ ของตัวนำยวดยิ่งลักษณะแผ่นจานในงาน [51],[52] สิ่งนี้หมายถึง วงแหวนตัวนำยวดยิ่งทำให้เกิดสภาพยวดยิ่งในเส้นโลหะเฟร์โรจากผลประกบ และพฤติกรรมของระบบไฮบริดจ์ SC-FM ภายใต้การพิจารณานั้นเหมือนกับการพิจารณาทรงกระบอกตัวนำยวดยิ่ง (แผ่นจาน) ด้วยพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบแบบไม่เอกพันธุ์ (inhomogeneous order parameter) ถัดมาขอให้สังเกตว่า T_c เทียบกับ ϕ_f ที่กำหนดสอดคล้องกับสถานะที่มีโมเมนตัมเชิงมุม L ใกล้กับส่วนจำนวนเต็มของค่า ϕ_f เพราะหาก $\phi_f = L$ หรือพจน์เชิงวงโคจร (orbital term) ของ Ω_L ในสมการที่ (3.67) หายไป ทำให้ Ω_L มีค่าต่ำสุด กล่าวคือ $T_c(\phi_f = L)$ จะถูกกำหนดเพียงผลจากอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนเท่านั้น ทำให้ $T_c(\phi_f)$

ที่ได้ มีพฤติกรรมคล้ายรูประฆังคว่ำ (สัญลักษณะจุดในรูปที่ 3c และ 3d ในงาน [49]) ซึ่งตรงกับพฤติกรรม $T_c\left(\phi_f\right)$ ของโครงสร้างไฮบริดจ์ SC-FM มีโซสโคปแบบแผ่นจาน (mesoscopic disk-shaped) ในงาน [53] และตัวนำออร์แกนิคกึ่งสองมิติ (quasi-two dimensional organic conductors) ในงาน [54]

กล่าวสรุป การวิเคราะห์พฤติกรรมการกวัดแกว่งแบบลิตเติล-ปาร์ค ของอุณหภูมิวิกฤต T_c ตามการแปรค่า H ในระบบ SC-FM แบบหลายเชิง ที่ได้รับผลจากอันตรกิริยาแลกเปลี่ยน โดยทำการศึกษาในกรอบสมการอูซาเดลเชิงเส้น ซึ่งงานนี้แสดงให้เห็นว่า สนามแลกเปลี่ยนกระตุ้นให้เกิดการผลัดเปลี่ยน (switching) สถานะตัวนำยวดยิ่งที่มีภาวะวอร์เทคต่าง ๆ การมีอิทธิพลร่วมกันระหว่างสนามภายนอก (external field) และสนามแลกเปลี่ยน (exchange field) ที่ทำให้ T_c กวัดแกว่ง (Little-Parks effect) ส่งผลให้เกิด ปรากฏการณ์ผลัดเปลี่ยน (switching phenomena) เหนือสิ่งอื่นใด สนามเหล่านี้จะทำลายภาวะคาบสมบูรณ์ (strict periodicity) ของ $T_c\left(H\right)$ ยิ่งไปกว่านั้น ได้สังเกตเห็นพฤติกรรมแปลกประหลาดของ T_c ด้วยการเพิ่มขึ้นของค่า γ_b (ผนังรอยต่อ SC-FM) โดยทั่วไปแล้ว γ_b เพิ่มขึ้น ทำให้ T_c มีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากการกระโดดกลับของคู่คูเปอร์จากชั้น FM ไปสู่ชั้น SC มีความยาก จึงอยู่ในชั้น FM ได้เป็นเวลานาน แต่ในกรณีรัศมี FM มีขนาดเล็ก (สนามอ่อน) T_c ที่ γ_b น้อย จะมีค่าสูงกว่า T_c ที่ γ_b มาก ซึ่งการที่สนามแลกเปลี่ยนในชั้น FM เป็นแบบอ่อนส่งผลให้บทบาทการแตกคู่ Ω_L มีพฤติกรรมสวนทางกับ γ_b กล่าวคือ หากเพิ่ม γ_b เมื่อคู่คูเปอร์ทลวงเข้าไปในชั้น FM ก็จะทำให้คู่คูเปอร์แยกออกจากกันได้ยาก จึงไม่มีทางที่ T_c ที่ γ_b น้อย จะมีค่าสูงกว่า T_c ที่ γ_b มาก พฤติกรรมที่ขัดกับสามัญสำนึกดังกล่าว สามารถอธิบายได้ว่า การทลวงของคู่คูเปอร์ในระยะตื้นทำให้คู่คูเปอร์มีพลังงานเพียงพอที่จะอยู่ในชั้น FM เป็นเวลานานก่อนที่จะกระโดดกลับมายังชั้น SC

อีกหนึ่งความน่าสนใจของโครงสร้างไฮบริดจ์ SC-FM แบบหลายเชิง คือ หากพิจารณาการเคลื่อนที่เชิงเส้นของคู่คูเปอร์ที่กำกับในรูปเลขคลื่น (wave number ; p) ร่วมกับผลเชิงโคจรของคู่คูเปอร์ที่กำกับด้วยเลขวินดิ่ง (winding number ; L) สถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์จะมีความเสถียรภาพต่อระบบโครงสร้างนี้หรือไม่ คำตอบจะแฝงอยู่ในหัวข้อถัดไป

3.3.3 พฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤตในระบบ SC-FM และความไม่เสถียรภาพของสถานะ FFLO

ในปี ค.ศ. 1964 P. Fulde, R. A. Ferrel, A. I. Larkin และ Yu. N. Ovchinnikov แสดงให้เห็นทางทฤษฎีว่า สนามแม่เหล็กแบบเข้มที่กระทำต่อสปินของอิเล็กตรอนในตัวนำยวดยิ่ง ก่อให้เกิดเฟสตัวนำยวดยิ่งที่ไม่สม่ำเสมอ (non-uniform superconducting phase) ด้วยการแปรค่าของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (FFLO modulate) [55],[56] โดยกลไกสำคัญในการก่อตัวของสถานะ FFLO คือ โมเมนตัมเชิงเส้นของคู่คูเปอร์ไม่เป็นศูนย์ด้วยการแยกผิวเฟร์มี สำหรับอิเล็กตรอนสปินขึ้น $(\uparrow)$ และสปินลง $(\downarrow)$ จากอันตรกิริยาซีมานน์ (Zeeman interaction) จากที่ได้กล่าวไปในหัวข้อคู่คูเปอร์ที่เป็นหนึ่งในกลไกสำคัญในการเกิดสภาพยวดยิ่ง โดยคู่คูเปอร์เกิดขึ้นจากอิเล็กตรอนสองตัวมีโมเมนตัมและสปินตรงกันข้าม การจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมสำหรับอิเล็กตรอนที่มีสปินชนิดซิงเกลต (spin singlet) ทำให้โมเมนตัมรวมของคู่คูเปอร์จะเป็น $k_F+(-k_F)=0$ เมื่อ k_F คือ โมเมนตัมในระดับเฟร์มี (Fermi momentum) แต่หากอิเล็กตรอนอยู่ภายใต้สนามแม่เหล็ก B โมเมนตัมของอิเล็กตรอนสปินขึ้นจะเลื่อนจาก $+k_F$ ไปเป็น $k_1=k_F+\delta k_F$ เมื่อ $\delta k_F=\mu_B B/v_F$ โดยที่ $\mu_B=e\hbar/2m_e c$ คือ โบร์แมกนิตรอน (Borh magnetron) และ v_F คือ ความเร็วเฟร์มี (Fermi velocity) ทำนองเดียวกัน โมเมนตัมของอิเล็กตรอนสปินลงจะเลื่อนจาก $-k_F$ ไปเป็น $k_2=-k_F+\delta k_F$ ดังนั้น การที่อิเล็กตรอนทั้งสองเข้าคู่กันภายใต้สนามแม่เหล็ก ทำให้โมเมนตัมรวมมีค่าไม่เป็นศูนย์ $\sum k=k_1+k_2=2\delta k_F\neq 0$ ซึ่งจะก่อเกิดสถานะใหม่สำหรับวัสดุตัวนำยวดยิ่งบางชนิดในสนามแม่เหล็ก รู้จักในชื่อ สถานะ FFLO (FFLO states)

อีกหนึ่งความเป็นไปได้ที่เป็นผลให้สถานะ FFLO ปรากฏ คือ การแยกตัวของผิวเฟร์มีเนื่องจากสนามแลกเปลี่ยนในชั้น FM ซึ่งไม่สร้างกระแสเชิงวงโคจร เป็นผลให้ฟังก์ชันคลื่นคู่คูเปอร์สปินชนิดซิงเกลตถูกมอดุเลตข้ามชั้น และจะปรากฏสถานะ FFLO ขึ้น สิ่งนี้นำไปสู่ปรากฏการณ์ที่ผิดปรกติหลายอย่าง เช่น ความไม่เป็นอิสระของอุณหภูมิวิกฤติที่แกว่งตามความหนาของชั้น FM ในระบบไบเลเยอร์ SC-FM [57],[58] หรือการก่อเกิด π -Junction [59] ยิ่งไปกว่านั้นในปี ค.ศ. 2012 มิโรนอฟและคณะ (S. Mironov et al.) [60] ได้มีการแสดงให้เห็นว่าตัวนำยวดยิ่งสปินทริปเลต (spin triplet) ที่ถูกมอดุเลตตามชั้นต่าง ๆ ในแผ่นประกบ SC-FM ก็สามารถทำให้เฟส FFLO ในระนาบปรากฏขึ้นอีกด้วย ผลคือ T_c ในสถานะ FFLO ในช่วงพารามิเตอร์บางช่วงจะมีค่าสูงกว่าสถานะเอกพันธุ์ และสามารถเปลี่ยนจากสถานะปกติไปเป็นสถานะ FFLO ได้ อีกทั้งยังยืนยันข้อสรุปในประเด็น

ของงานว่า การหายไปของปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Meissner effect) ในระบบ SC-FM ลักษณะมัลติเลเยอร์ (multilayer) ส่งผลในการเกิดความไม่เสถียรภาพในระนาบ FFLO

ในวารสารฉบับนี้ [61] จะนำการจับคู่คูเปอร์แบบทริปเปลต (triplet) มาร่วมพิจารณา กล่าวคือ คู่อิเล็กตรอนมีสปินชี้ขึ้น $(\uparrow,\uparrow)$ หรือ $(\downarrow,\downarrow)$ เป็นคลื่นชนิดเอส (s-wave) ซึ่งเป็นคลื่นทรงกลมที่มีสภาพไอโซโทรปีอย่างสมบูรณ์ เรียกการควบแน่นลักษณะเช่นนี้ว่า การควบแน่นแบบคลื่นเอสทริปเปลต (s-wave triplet condensate) [62] โดยเป็นที่ทราบกันดีว่าในสถานะสปินซิงเกลตแบบคลื่นเอส หรือการควบแน่นแบบคลื่นเอสซิงเกลต (s-wave singlet condensate) จะแสดงด้วยเลขควอนตัมสปิน $S=0$ ที่ภาพฉายของสปินลงบนแกนควอนไทเซชันให้ผล $S_z=0$ ในขณะที่สถานะสปินทริปเปลตแบบคลื่นเอสจะแสดงด้วยเลขควอนตัมสปิน $S=1$ ที่ภาพฉายของสปินลงบนแกนควอนไทเซชันสำหรับสนามแลกเปลี่ยนเอกพันธุ์ให้ผล $S_z=0$ เท่านั้น แต่สำหรับสนามไม่เอกพันธุ์ภาพฉายของสปินลงบนแกนควอนไทเซชัน $S_z=0,\pm1$ โวลคอฟและคณะ (Volkov et al.) ได้อธิบายไว้ใน [63] ที่กล่าวถึง ความเป็นแม่เหล็กไม่เอกพันธุ์ (inhomogeneous magnetization) ที่จะนำไปสู่การทลวงสู่ชั้นโลหะเฟร์โรแบบระยะไกล (long-range penetration) อย่างไรก็ดี ข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่า การพิจารณาสปินทริปเปลตแบบคลื่นเอส ภายใต้เงื่อนไขสนามเอกพันธุ์จะให้ผลเดียวกับการพิจารณาในสปินซิงเกลตแบบคลื่นเอส $(S_z=0)$

เมื่อประยุกต์การควบแน่นแบบคลื่นเอสทริปเปลตเข้ากับระบบแผ่นประกบของ SC-FM โวลคอฟพบว่า คู่คูเปอร์ในสถานะสปินทริปเปลตจะก่อตัวในสนามแลกเปลี่ยนที่มีความเข้มสูงที่ทลวงเข้าไปในชั้นแม่เหล็กได้ระยะไกล (long-range triplet component ; LRTC) ทำให้แบบจำลองของโวลคอฟนำเสนอปัญหานี้ได้ เหนือสิ่งอื่นใด ก็ได้ไขข้อสงสัยอย่างแยบยล ว่าเหตุใด สภาพยวดยิ่งจึงไม่ถูกทำลายในชั้นแม่เหล็กเฟร์โร โวลคอฟเลือกใช้วิธีฟังก์ชันกรีนเชิงกึ่งแบบฉบับ (quasiclassical Green’s functions) รายละเอียดทางทฤษฎีจะไม่กล่าวถึงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เนื่องจากเป้าหมายในหัวข้อนี้ มุ่งเน้นไปที่ผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนจะก่อให้เกิดสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ (inhomogeneous superconducting states) ด้วยการพิจารณาการจับคู่แบบสปินซิงเกลต (spin singlet ; s) และสปินทริปเปลต (spin triplet ; t) จากการกำหนดพารามิเตอร์ฐานหลักของฟังก์ชันกรีนอะนอมาลุสเชิงกึ่งแบบฉบับ (quasiclassical anomalous Green function) เพื่อให้ได้เห็นคำ

นิยามของสถานะสปินซิงเกลตและสปินทริปเปลตที่ชัดเจน สามารถตามต่อได้ใน [64],[65] และ [66] ดังนั้น $\hat{F}(\mathbf{r},\omega)$ กระจายได้เป็น

$$\hat{F}_{sc,fm} = F^{s}_{sc,fm} + \mathbf{F}^{t}_{sc,fm}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.69}$$

โดยที่ $F^{s}_{sc}\left(F^{s}_{fm}\right)$ คือ แอมพริจูดคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินซิงเกลตของตัวนำยวดยิ่ง (โลหะเฟร์โร)

$\mathbf{F}^{t}_{sc}\left(\mathbf{F}^{t}_{fm}\right)$ คือ เวกเตอร์แอมพริจูดคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินซิงเกลตของตัวนำยวดยิ่ง (โลหะเฟร์โร)

$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\right)$ คือ เวกเตอร์เมทริกซ์สปินเพาลี

ในที่นี้ ผลของสนามแลกเปลี่ยนจะถูกประมาณในรูปแบบที่มีความสม่ำเสมอ (uniform exchange field) และความเป็นแม่เหล็ก (magnetization) ถูกเลือกให้ขนานแกนแม่เหล็กเฟร์โร $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ (ตั้งฉากกับระนาบทรงกระบอก) กล่าวคือ ปริภูมิสปินแบบทริปเปลต $\mathbf{F}^{t}_{sc,fm}$ จะมีทิศชี้ตามแกนควอนไทเซชัน ภาพฉายสปินลงบนแกนควอนไทเซชันจะเป็นศูนย์ (zero projection) ดังนั้น สนามแลกเปลี่ยนสามารถเขียนในรูปฟังก์ชันขั้นบันได (step function)

$$h(r) = \begin{cases} h & ;\ r \le d_f \\ 0 & ;\ d_f < r \le d_s \end{cases}$$

ในส่วนการคำนวณเริ่มจากพิจารณาขีดจำกัดสารเจือในการเปลี่ยนเฟสอันดับสอง ซึ่งสามารถเขียนสมการอูซาเดลเชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันแอมพริจูดคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินซิงเกลตและสปินทริปเปลต บริเวณตัวนำยวดยิ่งได้เป็น

$$-\frac{D_{sc}}{2}\tilde{\nabla}^2 F^{s}_{sc}(\mathbf{r},\omega) + |\omega| F^{s}_{sc}(\mathbf{r},\omega) = \Delta(\mathbf{r}) \tag{3.70}$$

$$-\frac{D_{sc}}{2}\tilde{\nabla}^2 F^{t}_{sc}(\mathbf{r},\omega) + |\omega| F^{t}_{sc}(\mathbf{r},\omega) = 0 \tag{3.71}$$

และในบริเวณโลหะเฟร์โร (พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบเป็นศูนย์เสมอ $\Delta = 0$)

$$-\frac{D_{fm}}{2}\tilde{\nabla}^2 F^{s}_{fm}(\mathbf{r},\omega) + \left[|\omega| + ih\,\mathrm{sgn}\,\omega\right] F^{t}_{fm}(\mathbf{r},\omega) = 0 \tag{3.72}$$

$$-\frac{D_{fm}}{2}\tilde{\nabla}^2 F_{fm}^t(\mathbf{r},\omega)+\left[|\omega|+ih\,\mathrm{sgn}\,\omega\right]F_{fm}^s(\mathbf{r},\omega)=0 \qquad (3.73)$$

การมีอยู่ของสนามแม่เหล็กจากเนื้อโลหะเฟร์โร ทำให้เกรเดียนต์ (gradient ; $\tilde{\nabla}$) ต้องถูกแทนด้วยเกจ – อินเวร์เรียนต์ (gauge – invariant ; $\tilde{\nabla}=\nabla-2ei\mathbf{A}/\hbar c$) เมื่อ $\mathbf{A}$ คือ ศักย์เวกเตอร์ (vector potential) อย่างไรก็ตาม สามารถเพิกเฉยต่อสิ่งนี้ได้ เนื่องด้วยผลจากความเป็นแม่เหล็ก (magnetization ; $\mathbf{M}$) ในทรงกระบอกเฟร์โรถูกประมาณเป็น $\mathbf{M}=M\hat{\mathbf{z}}=\nabla\times\mathbf{A}/4\pi$ ที่มีทิศชี้ตามแกนที่ตั้งฉากกับระนาบของทรงกระบอก โดยฟลักซ์แม่เหล็กเกิดขึ้น (additional magnetic flux ; Φ_M) ติดค้างอยู่ในโพรงของตัวนำยวดยิ่งขนาด $\Phi_M=4\pi^2 d_f^2 M$ ที่ก่อให้เกิดศักย์เวกเตอร์ $A_\theta\simeq 2\pi M d_f$ ซึ่งละทิ้งได้หาก $1/d_f \gg 2\pi A_\theta/\Phi_0$ หรือ $\Phi_0\gg\Phi_M$ เมื่อ Φ_0 คือ ฟลักซ์เชิงควอนตัม (flux quantum) และโดยปรกติแล้ว $M\sim 10^2 G$, $T_c\sim 10K$ และ $d_f\sim 10nm$ จะพบว่า $\Phi_0\gg\Phi_M$ ทำให้ผลจาก $\mathbf{M}$ แทบจะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในตัวอย่างแบบจำลองนี้ แนวทางการแก้ปัญหาเริ่มจากการใช้สมมาตรเชิงมุม (azimuthal symmetry) ในแบบจำลอง ทำการแยกส่วนเชิงมุม (angular part) และส่วนเชิงเส้น (linear part) ออกจากส่วนรัศมี (radius part) ของทั้งแอมพริจูดฟังก์ชันคลื่นคู่ $F(\mathbf{r},\omega)$ และพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ $\Delta(\mathbf{r})$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{r})&=\Delta(r)e^{iL\theta+ipz}\\ F_{fm,sc}^{s,t}(\mathbf{r},\omega)&=F_{fm,sc}^{s,t}(r,\omega)e^{iL\theta+ipz}\end{aligned} \qquad (3.74)$$

ถัดมานำสมการที่ (3.74) แทนลงในสมการอูซาเดล จะได้สมการหนึ่งมิติในบริเวณตัวนำยวดยิ่ง $d_f<r<d_f+d_s$ สำหรับสปินซิงเกลตและสปินทริปเปลต ตามลำดับดังนี้

$$\left(|\omega|-\frac{D_{sc}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{sc}^s(r,\omega)=\Delta(r) \qquad (3.75)$$

$$\left(|\omega|-\frac{D_{sc}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{sc}^t(r,\omega)=\Delta(r) \qquad (3.76)$$

และในบริเวณโลหะเฟร์โร $0<r<d_f$

$$\left(|\omega|-\frac{D_{fm}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{fm}^s(r,\omega)+ih\,\mathrm{sgn}\,\omega F_{fm}^t(r,\omega)=0 \qquad (3.77)$$

$$\left(|\omega|-\frac{D_{fm}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{fm}^t(r,\omega)+ih\,\mathrm{sgn}\,\omega F_{fm}^s(r,\omega)=0 \tag{3.78}$$

ในที่นี้ $\hat{\pi}_r^2$ คือ ตัวดำเนินการเชิงรัศมี (radial operator)

$$\hat{\pi}_r^2=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)-\left(p^2+\frac{L^2}{r^2}\right) \tag{3.79}$$

ภายใต้เงื่อนไขสนามเข้ม $h\gg\pi T_c$ สมการที่ (3.77) และ (3.78) จะให้ฟังก์ชัน $F_{fm}(r,\omega)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซิลดัดแปลงชนิดที่หนึ่ง (modified Bessel function of the first kind ; $I_\upsilon(x)$)

$$F_{fm}^{s,t}(r,\omega)=C_f^{s,t}(\omega)I_L(q_p r) \tag{3.80}$$

โดยที่ $q_p^2=p^2+2i/\xi_h^2$ และความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ $C_f^s(\omega)$ และ $C_f^t(\omega)$ ถูกหาโดยการแทนสมการที่ (3.80) ลงในสมการที่ (3.77) และ (3.78) ทำให้ได้ระบบพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebraic system) ดังนี้

$$\left[-\xi_h^2\left(q_p^2-p^2\right)+|\omega|/h\right]C_f^s(\omega)+2i\,\mathrm{sgn}\,\omega C_f^t(\omega)=0 \tag{3.81}$$

$$2i\,\mathrm{sgn}\,\omega C_f^s(\omega)+\left[-\xi_h^2\left(q_p^2-p^2\right)+|\omega|/h\right]C_f^t(\omega)=0 \tag{3.82}$$

ระบบพีชคณิตเชิงเส้นในสมการที่ (3.81) และ (3.82) จะมีผลเฉลยไม่ชัดแจ้ง[5] (nontrivial solution) หากว่า

$$q_p^2-p^2=2\left(\frac{|\omega|}{h}\pm i\right)\Big/\xi_h^2 \tag{3.83}$$

หรือตามเงื่อนไขการประมาณสนามเข้ม $|\omega|/h\ll 1$ สมการที่ (3.83) กลายเป็น

$$q_p\simeq\left(p^2+2i/\xi_h^2\right)^{1/2} \tag{3.84}$$

---

[5] ระบบเอกพันธุ์ (homogeneous system) $A\tilde{x}=\tilde{0}$ จะเห็นได้ว่า $\tilde{x}=\tilde{0}$ เป็นผลเฉลยชุดหนึ่งเสมอ เรียกผลเฉลยนี้ว่า ผลเฉลยชัดแจ้ง (trivial solution) ในอีกด้านหนึ่ง หากระบบมีผลเฉลยอื่นๆ ที่มีตัวแปรบางตัวไม่เป็นศูนย์ $\tilde{x}\neq\tilde{0}$ จะเรียกผลเฉลยนี้ว่า ผลเฉลยไม่ชัดแจ้ง (nontrivial solution)

ท้ายที่สุดจะได้

$$C_f^t(\omega) = \pm \operatorname{sgn} \omega C_f^s(\omega) \tag{3.85}$$

จากสมการที่ (3.85) สามารถนิพจน์แอมพริจูดเชิงซ้อน (complex amplitude) A_n และ $\tilde{A}_n$ ของฟังก์ชัน $F_{fm}^s(r,\omega)$ และ $F_{fm}^t(r,\omega)$ ได้ดังนี้

$$F_{fm}^s(r,\omega) = A_n I_L(q_p r) + \tilde{A}_n I_L(q_p^* r) \tag{3.86}$$

$$F_{fm}^t(r,\omega) = \operatorname{sgn} \omega \left[A_n I_L(q_p r) - \tilde{A}_n I_L(q_p^* r) \right] \tag{3.87}$$

ต่อมาให้พิจารณาในบริเวณตัวนำยวดยิ่ง $d_f < r < d_f + d_s$ ของสปินซิงเกลตและสปินทริปเปลต ตามสมการที่ (3.75) และ (3.76) การแก้สมการอูซาเดลควรถูกเสริมด้วยเงื่อนไขขอบเขตคูพริยานอฟ – ลูคิเซฟ [30] ที่บริเวณรอยต่อ (interface boundary condition) ระหว่าง SC-FM ดังนั้น สำหรับซิงเกลตและทริปเปลต จะมีรูปแบบเงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อ ดังนี้

$$\begin{aligned} \nabla F_{sc}^{s,t} &= \frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{sc}} \nabla F_{fm}^{s,t} \\ F_{sc}^{s,t} &= F_{fm}^{s,t} + \gamma_b \xi_{fm} \nabla F_{fm}^{s,t} \end{aligned} \tag{3.88}$$

และเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณภายนอกผิว (outer surface boundary condition) ของระบบแผ่นประกบ $r = d_f + d_s$

$$\nabla F_{sc}^{s,t} = 0 \tag{3.89}$$

ใช้ขอบเขตภายนอกผิวในการวิเคราะห์สมการ (3.75) และ (3.76) โดยการพิจารณาเปลือกตัวนำยวดยิ่งที่ห่อหุ้มโลหะเฟร์โรลักษณะเปลือกบาง $(d_s \ll \xi_s)$ สิ่งนี้ทำให้สามารถพิจารณาฟังก์ชัน $F_{sc}^{s,t}(r)$ และ $\Delta(r)$ ไม่แปรค่าตามรัศมี r อีกต่อไป กล่าวคือ การแก้สมการที่ (3.75) และ (3.76) ทำได้โดยวิธีการอินทิเกรตตลอดเปลือกตัวนำยวดยิ่ง และหากแทน $D_{sc}/2 = \pi T_{cs} \xi_{sc}^2$ สมการที่สองจะกลายเป็น

$$\left. \frac{d}{dr} F_{sc}^s \right|_{d_f} = \frac{d_s}{\pi T_{cs} \xi_s^2} \left[\Delta - \Omega \left. F_{sc}^s \right|_{d_f} \right] \tag{3.90}$$

$$\left.\frac{d}{dr}F_{sc}^{t}\right|_{d_f} = -\frac{d_s}{\pi T_{cs}\xi_s^2}\Omega F_{sc}^{t}\Big|_{d_f} \tag{3.91}$$

ในที่นี้

$$\Omega = |\omega| + D_{sc}\left(L^2/d_f^2 + p^2\right)/2 \tag{3.92}$$

สำหรับสปินทริปเปลตในสมการ (3.87) ให้ใช้เงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อ $r = d_f$

$$\left.\frac{d}{dr}F_{sc}^{t}\right|_{d_f} = W F_{sc}^{t}\Big|_{d_f} \tag{3.93}$$

โดยที่ W คือ ฟังก์ชันขอบเขต (boundary function) นิยามเป็น

$$W = \frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{sc}} \frac{\left[A_n \dfrac{\alpha_L(p)}{d_f} I_L(u_p) - \tilde{A}_n \dfrac{\alpha_L^*(p)}{d_f} I_L(u_p^*)\right]}{\left[A_n I_L(u_p) - \tilde{A}_n I_L(u_p^*) + \gamma_b \xi_{fm}\left(A_n \dfrac{\alpha_L(p)}{d_f} I_L(u_p) - \tilde{A}_n \dfrac{\alpha_L^*(p)}{d_f} I_L(u_p^*)\right)\right]} \tag{3.94}$$

เมื่อ $\alpha_L(p) = |L| + u_p \dfrac{I_{|L|+1}(u_p)}{I_L(u_p)}$

สังเกตเห็นได้ว่าการพิจารณาสมการที่ (3.91) และ (3.93) ทำให้เราได้รับ

$$-\frac{d_s}{\pi T_{cs}\xi_s^2}\Omega = W \tag{3.94}$$

เพื่อความสะดวกในการหยิบมาใช้ในภายหลัง แอมพริจูดเชิงซ้อน A_n และ $\tilde{A}_n$ ในสมการ (3.94) ถูกเขียนในรูปอย่างง่าย ดังนี้

$$\tilde{A}_n = A_n\left(Z_n/Z_n^*\right) \tag{3.95}$$

ในที่นี้ พารามิเตอร์เชิงซ้อน (complex parameter) มีนิยามเป็น

$$Z_n = \left(1 + \gamma_b \xi_f \frac{\alpha_L(p)}{d_f}\right)\left(|\omega| + \Omega_L(p)\right) I_L(u_p) \tag{3.96}$$

และนิยาม พารามิเตอร์การแตกคู่ (depairing parameter ; $\Omega_L(p)$) เป็น

$$\Omega_L(p) = \pi T_{cs}\xi_{sc}^2\left[\frac{L^2}{d_f^2} + p^2 + \frac{\sigma_{fm}/\sigma_{sc}}{d_s\left(\gamma_b\xi_f + d_f/\alpha_L(p)\right)}\right] \tag{3.97}$$

ในทำนองเดียวกัน ใช้เงื่อนขอบเขตบริเวณรอยต่อ $r = d_f$ สำหรับการพิจารณาสปินซิงเกลตในสมการที่ (3.86) เพื่อความสะดวกจะแยกพิจารณาเป็นสองพจน์ พจน์แรกคือ $\frac{d}{dr}F_{sc}^s$ ส่วนพจน์ที่สอง คือ F_{sc}^s การพิจารณาพจน์แรกให้ผลเป็น

$$\left.\frac{d}{dr}F_{sc}^s\right|_{d_f} = \frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{sc}}\left[A_n\frac{\alpha_L(p)}{d_f}I_L(u_p) - \tilde{A}_n\frac{\alpha_L^*(p)}{d_f}I_L(u_p^*)\right]$$

และพจน์ที่สอง

$$\left.F_{sc}^s\right|_{d_f} = A_n I_L(u_p)\left(1+\gamma_b\xi_f\frac{\alpha_L(p)}{d_f}\right) + \tilde{A}_n I_L(u_p^*)\left(1+\gamma_b\xi_f\frac{\alpha_L^*(p)}{d_f}\right)$$

สำหรับซิงเกลต ค่าที่ได้จะต้องเป็นค่าจริงเสมอ ทำให้สามารถจัดรูปสมการที่ (3.90) ได้เป็น

$$A_n Z_n + \tilde{A}_n Z_n^* = \Delta$$

จากสมการที่ (3.95) ทำให้เราได้

$$A_n^* = \tilde{A}_n = \Delta/2Z_n^* \qquad \text{หรือ} \qquad A_n = \Delta/2Z_n \tag{3.98}$$

นำสมการ (3.98) แทนลงไปยังสมการ (3.86) และ (3.87) เพื่อหาแอมพริจูดฟังก์ชันคลื่นคู่ $F(r,\omega)$ ในบริเวณโลหะเฟร์โร สำหรับสปินซิงเกลตและสปินทริปเปลต ตามลำดับ

$$F_{fm}^s(r,\omega) = \mathrm{Re}\left[A_{nf}\frac{I_L(q_p r)}{I_L(q_p d_f)}\right] \tag{3.99}$$

$$F_{fm}^t(r,\omega) = i\,\mathrm{sgn}\,\omega\,\mathrm{Im}\left[A_{nf}\frac{I_L(q_p r)}{I_L(q_p d_f)}\right] \tag{3.100}$$

ในที่นี้ A_{nf} และ A_{ns} คือ ปริมาณเชิงซ้อน (complex quantities) ถูกนิยามดังนี้

$$A_{nf}=\frac{A_{ns}}{1+\gamma_b\xi_f\,\dfrac{\alpha_L(p)}{d_f}} \qquad \text{และ} \qquad A_{ns}=\frac{\Delta}{|\omega|+\Omega_L(p)} \tag{3.101}$$

ในทำนองเดียวกัน การหาแอมพริจูดฟังก์ชันคลื่นคู่ $F(r,\omega)$ ในบริเวณตัวนำยวดยิ่ง สำหรับสปินซิงเกลตและสปินทริปเปลต จะใช้เงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อ $r=d_f$ ท้ายที่สุดจะได้

$$F_{sc}^{s}(\omega)=\mathrm{Re}[A_{ns}] \tag{3.102}$$

$$F_{sc}^{t}(\omega)=i\,\mathrm{sgn}\,\omega\,\mathrm{Im}[A_{ns}] \tag{3.103}$$

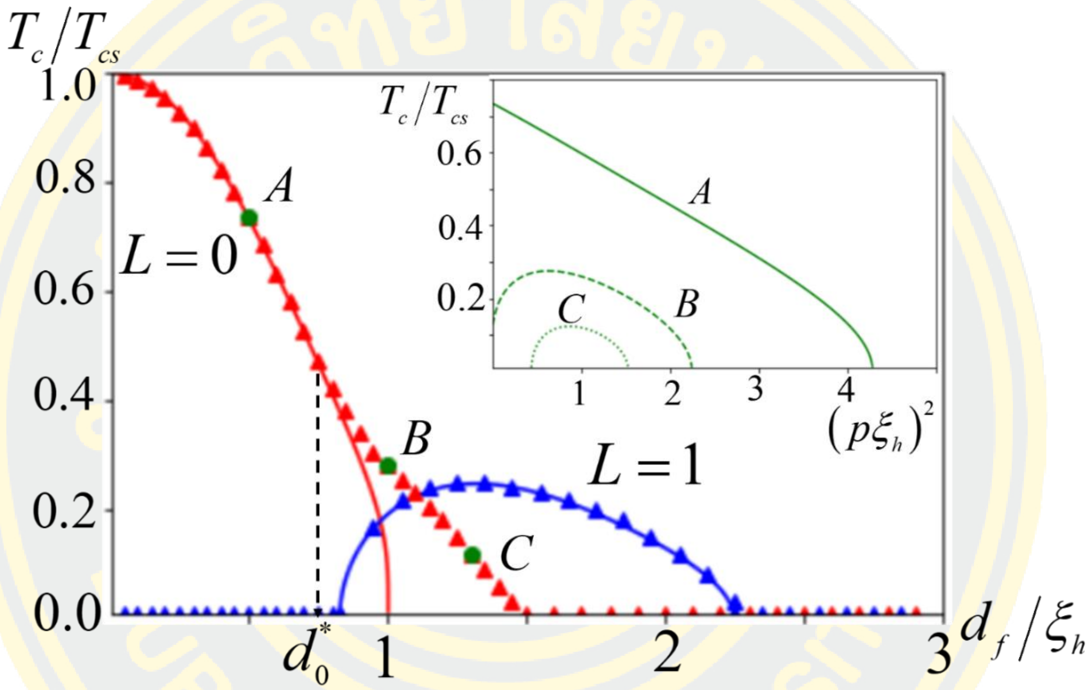
สังเกตง่าย ๆ แอมพริจูดฟังก์ชันคลื่นคู่ $F^{s}(r,\omega)$ ขององค์ประกอบสปินซิงเกลต เป็นฟังก์ชันคู่ที่เป็นส่วนจริง (real even function) ของความถี่มัตสึบาระ $F_{sc,fm}^{s}(r,-\omega)=F_{sc,fm}^{s}(r,\omega)$ หรือแสดงสมบัติภาวะคู่เชิงความถี่ของ $F^{s}(r,\omega)$ ในขณะที่แอมพริจูดฟังก์ชันคลื่นคู่ $F^{t}(r,\omega)$ ขององค์ประกอบทริปเปลต เป็นฟังก์ชันคี่ที่เป็นส่วนจินตภาพเท่านั้น (imaginary odd functions) $F_{sc,fm}^{t}(r,-\omega)=F_{sc,fm}^{t}(r,\omega)$ ได้อธิบายแล้วใน [63],[64] หรือแสดงภาวะคี่เชิงความถี่ของ $F^{t}(r,\omega)$ เป็นหนึ่งในสมมติฐานของบีเรซินสกี [67] ที่เรียกว่า การควบแน่นแบบทริปเปลตคี่ของบีเรซินสกี (Berezinskii’s odd frequency condensate) นอกจากนี้ ควรสังเกตด้วยว่า องค์ประกอบของทั้งสปินซิงเกลตและทริปเปลต เป็นฟังก์ชันคู่ของโมเมนตัมเชิงมุม L และเลขคลื่น p

ขั้นตอนสุดท้ายของการคำนวณเชิงวิเคราะห์นั่นก็คือ การแทนแอมพริจูดเชิงซ้อน A_{nf} ตามสมการที่ (3.101) และฟังก์ชัน $F_{sc}^{s}(\omega)$ ตามสมการที่ (3.102) ลงไปยังสมการคล้องจองกันในตัว (self-consistent equation) ตามสมการที่ (3.3) และทำการจัดรูปให้เหมือนสูตรอบริโคซอฟ – กอร์คอฟ จะได้

$$\ln\frac{T(p)}{T_{cs}}=\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Re}\,\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Omega_L}{2\pi T(p)}\right) \tag{3.104}$$

ค่าสูงสุดของ $T(p)$ จะให้อุณหภูมิวิกฤต T_c ที่ต้องการ และพารามิเตอร์การแตกคู่ Ω_L ถูกกำหนดไว้ในสมการที่ (3.97) การสังเกตพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิวิกฤตตามการแปรค่าของความหนาชั้นโลหะเฟร์โร จะใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) เพื่อตรวจสอบการปรากฏสถานะ FFLO ด้วยการสังเกตการเลื่อนขึ้นของอุณหภูมิวิกฤต ที่แปรค่าเวกเตอร์คลื่นตามยาว

(longitudinal modulation) ดังนั้น จึงทำการสร้างกราฟขึ้นมาด้วยกันสองกราฟ โดยกราฟแรก (กราฟหลัก) คือ กราฟสำหรับการปรากฏสถานะวอร์เทค (vortex states) และกราฟที่สอง (กราฟรอง) คือ กราฟสำหรับการปรากฏสถานะ FFLO ขอให้พึงตระหนักว่า สถานะ FFLO จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ $T_c(p \neq 0) > T_c(p = 0)$ ภายใต้เงื่อนไข อุณหภูมิดังกล่าวต้องสูงกว่าในสถานะวอร์เทค



รูปที่ 18 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต $T_c(p=0)$ และรัศมีเฟร์โร d_f (กราฟหลัก) ในมิติไร้หน่วย สถานะวอร์เทค (vortex states) เกิดจากการเลือกค่าภาวะวอร์เทค (vorticity) สองค่า ได้แก่ $L=0$ (สีแดง) และ $L=1$ (สีน้ำเงิน) การค้นหาสถานะ FFLO จะใช้สัญลักษณ์จุดสามจุด ได้แก่ จุดสีเขียว A, B และ C จุดเหล่านี้ คือจุดที่เลือกค่าเฉพาะของรัศมีแกนเฟร์โร เพื่อนำไปสร้างในกราฟรอง ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $T_c(p)$ และเลขคลื่น p ทั้งนี้ พารามิเตอร์ต่าง ๆ ในสมการที่ (3.104) จะถูกกำหนดให้มีค่าดังต่อไปนี้ $d_s/\xi_{sc} = 0.5$, $\sigma_{sc}/\sigma_{fm} = 0.5$, $\xi_{sc}/\xi_h = 0.1$, $\xi_{fm}/\xi_h = 1.5$ และ $\gamma_b = 0.5$ [61]

จากที่เห็นในรูปที่ 18 สำหรับขนาดแกน FM เล็ก หรือ $d_f/\xi_h \ll 1$ เกิดสถานะตัวนำยวดยิ่งเอกพันธุ์ในแนวแกน $z(p=0)$ เท่านั้น เนื่องจากไม่มีผลเชิงวงโคจรของคู่คูเปอร์ $L=0$ หรือผลประกบแบบอ่อน

(weak proximity) และที่รัศมีเฟร์โร $d_f/\xi_h \ll 1$ อุณหภูมิที่วัดได้จะมีค่าใกล้เคียงกับอุณหภูมิเชิงปริมาตร T_{cs}

นอกจากนี้ หากพิจารณาผลเชิงวงโคจรของคู่คูเปอร์ $L=1$ ร่วมกับขีดจำกัดขนาดแกน FM เล็ก แล้วจะพบว่า สถานะวอร์เทค $L=1$ ไม่มีทางเกิดขึ้นได้ สังเกตสีน้ำเงินในช่วงโดเมน $d_f/\xi_f \ll 1$ ของรูปที่ 18 เพราะว่า ผลเชิงวงโคจรแบบเข้ม (strong orbital effect) หากเพิ่มขนาดแกน FM ให้มีขนาดใหญ่ขึ้น ในช่วงโดเมน $d_f < d_0^*$ ผลจากสนามแลกเปลี่ยนของแกน FM อุณหภูมิวิกฤตจะถูกหน่วง แต่ค่าสูงสุด T_c ยังคงเกิดขึ้นที่ $p=0$ (สังเกตจุด A ในกราฟหลัก และเส้นโค้ง A ในกราฟรอง) จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า กราฟ $T(p)$ ที่จุด A มีพฤติกรรมเป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) ดังนั้น จึงตัดสินได้ว่า $T_c(p\neq 0)<T_c(p=0)$ คราวนี้ให้วิเคราะห์โดเมน $d_f > d_0^*$ อุณหภูมิวิกฤตมีพฤติกรรมเป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) (สังเกตจุด B ในกราฟหลัก และเส้นโค้ง B ในกราฟรอง) จะพบค่าสูงสุด $T_c(p\neq 0)>T_c(p=0)$ หมายความว่า โครงสร้าง SC-FM อนุญาตให้คลื่น p ถูกแปรค่าในสถานะวอร์เทคอิสระ $L=0$ และเมื่อเพิ่มรัศมีเฟร์โรมากขึ้นอีก (สังเกตจุด C ในกราฟหลัก และเส้นโค้ง C ในกราฟรอง) เลขคลื่น p ยังคงถูกแปรค่าในสถานะวอร์เทคอิสระ $L=0$ ด้วยแอมพริจูดขอ T_c ลดลง และอิทธิพลเชิงวงโคจรในสถานะวอร์เทค $L\geq 1$ จะเปลี่ยนเป็นแบบอ่อน เหตุผลก็คือ การลดลงของความเร็วยวดยิ่งเชิงมุม (azimuthal supervelocity ; $v_s \sim L/d_f$) และพลังงานจลน์ของกระแสยวดยิ่งลดลง

บทที่ 4 ผลการศึกษาวิทยานิพนธ์

เนื้อหาและเอกสารงานวิจัยที่นำมาวิจารณ์ในบทก่อนหน้านี้ เป็นพื้นฐานสำคัญของผลการศึกษาวิทยานิพนธ์เล่มนี้ งานวิจัยที่กำลังศึกษาเป็นการศึกษาเชิงทฤษฎีของระบบแผ่นประกบระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) เริ่มจากการวิเคราะห์พฤติกรรมฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ กล่าวคือ ทันทีที่คู่คูเปอร์ทลวงจากชั้นตัวนำยวดยิ่งสู่ชั้นแม่เหล็กเฟร์โร ฟังก์ชันคลื่นจะถูกหน่วงหรือถูกทำลาย ด้วยกลไกลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยน ที่เกิดจากโมเมนต์แม่เหล็กในชั้นโลหะเฟร์โร ทำให้ตรวจพบขนาดของอุณหภูมิวิกฤตในลักษณะลดลงตามการเพิ่มขึ้นของขนาดชั้นโลหะเฟร์โร แบบจำลองของแผ่นประกบในที่นี้มีลักษณะเป็นทรงกระบอกร่วมแกน ที่มีแกนกลางเป็นแม่เหล็กเฟร์โรล้อมรอบด้วยตัวนำยวดยิ่งผนังบาง และผิวสัมผัสระหว่างโลหะทั้งสองมีสภาพนำไฟฟ้าได้ดี ทั้งนี้ทรงกระบอกร่วมแกนดังกล่าว ถูกประยุกต์เข้ากับสนามแม่เหล็กภายนอกที่มีความเข้มคงตัว และมีทิศทางตามแนวแกนทรงกระบอก เพื่อทำให้เกิดฟลักซ์แม่เหล็กผ่านภาคตัดขวางทรงกระบอก เรียกว่า ฟลักซ์ซอยด์ (Fluxoid) การแปรผันของอุณหภูมิวิกฤตตามการแปรค่าของฟลักซ์ซอยด์สัมพัทธ์ รู้จักกันดีในชื่อของ ปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค (Little-Parks effect) [33],[34] ที่แสดงให้เห็นว่า ฟลักซ์ซอยด์ไม่ถูกบังคับให้เป็นจำนวนเต็มของฟลักซ์ควอนตัม การนำสนามแม่เหล็กภายนอกเข้ามาพิจารณาในระบบ SC-FM จะพบว่าสนามแม่เหล็กภายนอก มีหน้าที่ทำลายคู่คูเปอร์ด้วยกลไกเชิงวงโคจร (orbital mechanism) ดังนั้น การแข่งขันระหว่างบทบาท ผลเชิงวงโคจรและอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนจึงเกิดขึ้นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ เพราะสนามทั้งสองต่างก็มีหน้าที่ทำลายคู่อิเล็กตรอนที่จับคู่ในสถานะสปินซิงเกลต โดยหน่วงแอมพริจูดของฟังก์ชันคลื่นคู่อิเล็กตรอน พร้อมกับยืดคาบการแกว่ง ยิ่งไปกว่านั้น การกวัดแกว่งในลักษณะลดลงของคู่คูเปอร์ที่จับคู่ในสถานะสปินซิงเกลต โดยมีโมเมนตัมรวมของคู่คูเปอร์มีค่าจำกัด (ได้อธิบายไปแล้วในหัวข้อ 3.3.3) ก่อให้เกิดพฤติกรรมของตัวนำยวดยิ่งผิดปรกติจากเดิม ลักษณะของสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์นี้ จะสอดคล้องตามแบบฉบับของ P. Fulde, R. A. Ferrel [55] และ A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov [56] จึงเรียกสถานะว่า สถานะ FFLO (FFLO states)

จุดประสงค์ของงานวิจัย คือการตรวจหาสถานะ FFLO ในระบบแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) รูปเรขาคณิตทรงกระบอกเชื่อมกันคล้ายหลุม (multiply-connected) ที่

เป็นข้อกำหนดสำคัญของการเกิดฟลักซ์ซอยด์ที่หมุนวนในหลุม สถานะ FFLO จะถูกตรวจสอบผ่านปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค วิเคราะห์อุณหภูมิวิกฤตที่ขึ้นอยู่กับฟลักซ์แม่เหล็กไร้หน่วยในแกนโลหะเฟร์โรที่ประกอบด้วยพารามิเตอร์วอร์เทค (vorticities parameter ; L) และการแปรค่าเวกเตอร์คลื่นตามยาว FFLO (longitudinal FFLO modulation wavevector ; p) ในที่นี้จะเลือกให้เปลือกตัวนำยวดยิ่งมีความกว้าง d_s ล้อมรอบแกนโลหะเฟร์โรรัศมี d_f และมีสนามแม่เหล็กคงที่ครอบคลุมตลอดทั้งโดเมน SC-FM ในทิศทางตามแกนทรงกระบอก โลหะทั้งสองถูกสมมติให้เป็นไปตามเงื่อนไขขีดจำกัดสารเจือ (dirty-limit conditions) และสนามแลกเปลี่ยนบริเวณโลหะเฟร์โรเป็นสนามเอกพันธุ์ (homogeneous exchange field)

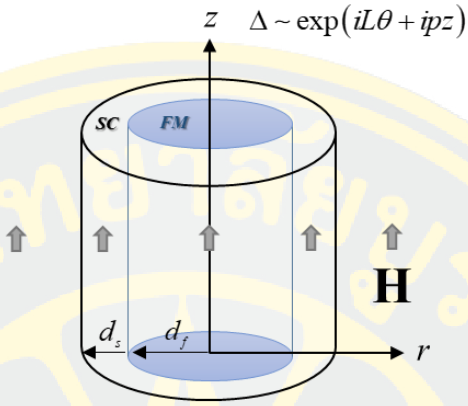
ในส่วนการคำนวณหาสมการที่ใช้บรรยายพฤติกรรมการแกว่งของอุณหภูมิวิกฤต ตั้งอยู่บนพื้นฐานของสมการอูซาเดลเชิงเส้น (linearized Usadel equations) ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง พร้อมกับสมการพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (order parameter) ในย่านใกล้เคียงอุณหภูมิวิกฤต ทั้งนี้ผลเฉลยของสมการอูซาเดลในแกนแม่เหล็กเฟร์โรและเปลือกตัวนำยวดยิ่ง ถูกเชื่อมโยงด้วยเงื่อนไขขอบเขตคูพริยานอฟ – ลูคิเซฟ [30] เพื่อช่วยในการหาสูตรอุณหภูมิวิกฤต ที่อยู่ในรูปสูตร อบริโคซอฟ – กอร์คอฟ (Abrikosov – Gor’ kov like - formula) [68] ท้ายที่สุด ใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ ผ่านปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค

บทนี้จะถูกจัดเรียงดังนี้ ในหัวข้อ 4.1 กล่าวถึงแบบจำลองและสูตรพื้นฐาน ในหัวข้อที่ 4.2 แสดงวิธีการคำนวณสูตรอุณหภูมิวิกฤต ท้ายสุดจะเป็นการบรรยายพฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤต ด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) ในหัวข้อ 4.3

4.1 แบบจำลองและสูตรพื้นฐาน (model and basic formulas)

พิจารณาโครงสร้างไฮบริดจ์ตัวนำยวดยิ่งเปลือกบางที่ล้อมรอบแกนโลหะเฟร์โรที่ประยุกต์ให้สนามแม่เหล็กภายนอกมีทิศพุ่งตั้งฉากกับระนาบทรงกระบอก ดังรูปที่ 19 และสมมติให้เวลาที่อิเล็กตรอนกระเจิงแบบยืดหยุ่นค่อนข้างน้อย $\tau \ll 1$ เพื่อให้อุณหภูมิวิกฤตในตัวนำยวดยิ่ง T_c และสนามแลกเปลี่ยน h สอดคล้องเงื่อนไขขีดจำกัดสารเจือ $T_c\tau \ll 1$ และ $h\tau \ll 1$ จึงทำให้สมการอูซาเดลเชิง

เส้น (linearized Usadel equations) ดังสมการที่ (3.37) เป็นสมการที่เหมาะสมและเรียบง่ายต่อการคำนวณ T_c ในย่านการเปลี่ยนเฟสอันดับสอง (second order phase transition)



รูปที่ 19 โครงสร้างแผ่นประกบไฮบริดจ์ของตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร รูปร่างเป็นทรงกระบอกโดยแกนแม่เหล็กเฟร์โรรัศมี d_f ถูกล้อมรอบด้วยตัวนำยวดยิ่งเปลือกบางขนาด d_s และมีสนามแม่เหล็กคงที่ทิศตั้งฉากกับระนาบทรงกระบอก

เขียนสมการอูซาเดลได้ดังนี้

$$-\frac{D}{2}\nabla^2 F(\mathbf{r},\omega)+\left[\omega+ih(\mathbf{r})\right]F(\mathbf{r},\omega)=\Delta(\mathbf{r}) \tag{4.1}$$

การมีอยู่ของสนามแม่เหล็กภายนอก $\mathbf{H}$ ทำให้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์จะอยู่ในรูปของเกจ – อินเวร์เรียนต์ (gauge – invariant ; $\nabla = \nabla - 2ei\mathbf{A}/\hbar c$) เมื่อ ศักย์เวกเตอร์ (vector potential) $\mathbf{A} = rH/2\hat{\theta}$ อีกทั้งยังสามารถละทิ้งผลจากความเป็นแม่เหล็ก $\mathbf{M}$ ดังที่กล่าวไปในหัวข้อ 3.3.2 จากรูปที่ 19 จะเห็นได้ว่า แบบจำลองมีลักษณะทรงกระบอก ด้วยเหตุนี้จึงเลือกใช้พิกัดทรงกระบอก (r,θ,z) มาใช้ในการคำนวณ พจน์ลาปลาเซียน ∇^2 จะถูกระบุไว้ตามสมการที่ (3.38) และจากความสมมาตรเชิงมุม (azimuthal symmetry) ในแบบจำลอง จึงสามารถแยกส่วนเชิงมุม (angular part) และส่วนเชิงเส้น (linear part) ออกจากส่วนรัศมี (radius part) ของทั้งแอมพริจูดฟังก์ชันคลื่นคู่ $F(\mathbf{r},\omega)$ ที่มีอยู่ในสถานะคลื่นเอสแบบสปินซิงเกลตและพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ $\Delta(\mathbf{r})$ ตามลำดับดังนี้

$$F_{fm,sc}(\mathbf{r},\omega)=F_{fm,sc}(r,\omega)e^{iL\theta+ipz}$$
$$\Delta(\mathbf{r})=\Delta(r)e^{iL\theta+ipz} \tag{4.2}$$

ถัดมานำสมการที่ (4.2) แทนลงในสมการอูซาเดล จะได้สมการหนึ่งมิติในบริเวณโลหะเฟร์โร $0<r<d_f$ และบริเวณตัวนำยวดยิ่ง $d_f<r<d_f+d_s$ ดังนี้

$$\left(\omega-\frac{D_{fm}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{fm}(r,\omega)+ihF_{fm}(r,\omega)=0 \tag{4.3}$$

$$\left(\omega-\frac{D_{sc}}{2}\hat{\pi}_r^2\right)F_{sc}(r,\omega)=\Delta(r) \tag{4.4}$$

ในที่นี้ $\hat{\pi}_r^2$ คือ ตัวดำเนินการเชิงรัศมี (radial operator)

$$\hat{\pi}_r^2=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)-p^2-\frac{1}{r^2}\left(L-\frac{r^2}{2a_H^2}\right)^2 \tag{4.5}$$

เมื่อ $a_H=\sqrt{\Phi_0/2\pi H}$ ถูกเรียกว่า ความยาวแม่เหล็ก (magnetic length)

การแก้สมการอูซาเดลในหนึ่งมิติ ในบริเวณตัวนำยวดยิ่งให้สำเร็จได้ ต้องพิจารณาร่วมกับสมการคล้องจองกันในตัว (self-consistent equation) ตามสมการที่ (3.3) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta(r)\ln\frac{T}{T_{cs}}+\pi T\sum_{\omega}\left(\frac{\Delta(r)}{\omega}-F_{sc}(r,\omega)\right)=0 \tag{4.6}$$

ทั้งนี้ การหาผลเฉลยของสมการอูซาเดลในแกนแม่เหล็กเฟร์โรและเปลือกตัวนำยวดยิ่ง ทั้งสองจะถูกเชื่อมโยงกันด้วยเงื่อนไขขอบเขตคูพริยานอฟ – ลูคิเซฟ [30] ที่บริเวณรอยต่อ (interface boundary condition) ของแผ่นประกบ $r=d_f$ ที่ว่า

$$\nabla F_{sc}=\frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{sc}}\nabla F_{fm}$$
$$F_{sc}=F_{fm}+\gamma_b\xi_{fm}\nabla F_{fm} \tag{4.7}$$

และเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณภายนอกผิว (outer surface boundary condition) ของระบบแผ่นประกบ $r=d_f+d_s$

$$\nabla F_{sc} = 0 \tag{4.8}$$

ผลเฉลยทั่วไปของฟังก์ชัน $F_{fm}(r,\omega)$ ในสมการที่ (4.3) และ $F_{sc}(r,\omega)$ ในสมการที่ (4.4) จะถูกหาในหัวข้อถัดไป เพื่อแสดงวิธีการคำนวณสูตรที่ใช้ในการบรรยายอุณหภูมิวิกฤต

4.2 สูตรอุณหภูมิวิกฤต (critical temperature formulas)

ในหัวข้อนี้ แสดงวิธีการที่ได้มาซึ่งสูตรอุณหภูมิวิกฤต เพื่อนำสูตรไปตรวจหาสถานะ FFLO ด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) เริ่มจากพิจารณาสมการหนึ่งมิติในบริเวณโลหะเฟร์โร $0 < r < d_f$ ตามสมการที่ (4.3) กรณีสนามเข้ม $h \gg \pi T_c$ พจน์ ω จะถูกละทิ้ง นำมาสู่วิธีการหาผลเฉลยของ F_{fm} ผ่านการประมาณเชิงเส้นกำกับ (asymptotic approximation) กล่าวคือ ในกรณีที่ ϕ มีค่ามาก ๆ ฟังก์ชัน $F_{fm} \simeq e^{-\phi/2}$ และหาก ϕ มีค่าน้อย ๆ ฟังก์ชัน $F_{fm} \simeq \phi^{|L|/2}$ ดังนั้น ผลเฉลยของฟังก์ชัน $F_{fm}(r,\omega)$ ในสมการที่ (4.3) ถูกแสดงผ่านฟังก์ชันคอนฟลูเอนท์ไฮเปอร์จีโอเมทริกชนิดที่หนึ่ง (confluent hypergeometric function of the first kind ; $\Phi(a,b,\phi)$) หรือที่เรียกกันอีกชื่อคือ ฟังก์ชันคูมเมอร์ (Kummer’s function) [50]

$$F_{fm}(r) = C\phi^{|L|/2} e^{-\phi/2} \Phi\left(a_f, L+1, \phi\right) \tag{4.9}$$

เมื่อ ϕ คือ ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กภายนอก H ที่ขดเป็นวงในรัศมี r ถูกวัดในหน่วยของฟลักซ์เชิงควอนตัม Φ_0

$$\phi = 2\pi r A_\theta / \Phi_0 = r^2 / 2a_H^2 \tag{4.10}$$

ในที่นี้ พารามิเตอร์ $a_f = \dfrac{1}{2}\left[|L| - L + 1 + a_H^2\left(p^2 + 2i/\xi_h^2\right)\right]$ เป็นปริมาณเชิงซ้อน เมื่อ $\xi_h = \sqrt{D_{fm}/h}$ คือ ความยาวของสนามแลกเปลี่ยน (exchange length) ที่เป็นบทบาทสำคัญในการหน่วงแอมพริจูดของฟังก์ชันคลื่นคู่ในชั้นโลหะเฟร์โร ขั้นตอนต่อไปจะทำการเขียนรูปแบบฟังก์ชันขอบเขต (boundary function ; W) โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตคูพริยานอฟ – ลูคิเซฟ [30] ที่บริเวณรอยต่อ $r = d_f$ ระหว่าง SC-FM ตามสมการที่ (4.7) จึงได้ ฟังก์ชันขอบเขตเป็น

$$W = \frac{\left(\sigma_{fm}/\sigma_{sc}\right)\kappa_{L,p}}{d_f + \gamma_b \xi_{fm} \kappa_{L,p}} \tag{4.11}$$

ในที่นี้

$$\kappa_{L,p} = |L| - \phi_f + 2\phi_f \frac{a_f}{|L|+1} \frac{\Phi\left(a_f + 1, |L| + 2, \phi_f\right)}{\Phi\left(a_f, |L| + 1, \phi_f\right)} \tag{4.12}$$

เมื่อ $\phi_f = d_f^2 / 2a_H^2$ คือ ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กภายนอกที่ปิดล้อมโลหะเฟร์โร

ต่อมาให้พิจารณาในบริเวณตัวนำยวดยิ่ง ตามสมการที่ (4.4) ผลเฉลยของฟังก์ชันถูกแก้โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณผิวนอก $r = d_f + d_s$(outer surface) กับพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (order parameter) ตามเงื่อนไขการคล้องจองกันในตัว (self-consistency condition) ยิ่งไปกว่านั้น หากวิเคราะห์ กรณีตัวนำยวดยิ่งเปลือกบาง (หรือสมมติให้ $d_s \ll \xi_s$) ที่ทำให้การผันแปรของฟังก์ชัน $F_{sc}(r,\omega)$ และ $\Delta(r)$ ไม่ขึ้นกับรัศมี r อีกต่อไป ที่จะนำมาสู่การหาผลเฉลย $F_{sc}(\omega)$ ด้วยการใช้วิธีการอินทิเกรตสมการที่ (4.4) ตลอดทั้งเปลือกตัวนำยวดยิ่ง ท้ายที่สุดจะได้ $F_{sc}(\omega)$ ในรูปแบบการประมาณโหมดเดียว (single mode approximation ; SMA) [47]

$$F_{sc}(\omega) = \frac{\Delta}{\omega + \frac{D_{sc}}{2}\left[p^2 + \left(\frac{L - \phi_f}{d_f}\right)^2 + \frac{W}{d_s}\right]} \tag{4.13}$$

จากนั้นนำสมการที่ (4.13) แทนลงไปใน สมการคล้องจองกันในตัว (self-consistent equation) ตามสมการที่ (4.6) และใช้ประโยชน์จากฟังก์ชันไดแกมมา (digamma function ; ψ) [48] ทำให้ได้สูตรคำนวณอุณหภูมิวิกฤตที่เป็นไปตามสูตร อบริโคซอฟ – กอร์คอฟ (Abrikosov – Gor’ kov like - formula) [68]

$$\ln \frac{T}{T_{cs}} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{Re}\,\psi\left(\frac{1}{2} + \Omega_{L,p}\left(\phi_f\right)\right) \tag{4.14}$$

อุณหภูมิวิกฤต T_c จะถูกกำหนดด้วยค่าสูงสุดของ T และพารามิเตอร์การแตกคู่ (depairing parameter)

$$\Omega_{L,p}\left(\phi_f\right)=\frac{1}{2}\frac{T_{cs}}{T}\xi_{sc}^2\left[p^2+\left(\frac{L-\phi_f}{d_f}\right)^2+\frac{W}{d_s}\right] \tag{4.15}$$

มีหน้าที่ทำลายความเป็นสภาพยวดยิ่งจากผลเชิงวงโคจร (orbital effect) และผลสนามแลกเปลี่ยน (exchange effect) ฟังก์ชันขอบเขต W ถูกกำหนดไว้แล้วในสมการที่ (4.11) อย่างไรก็ตาม สมการที่ (4.14) คือ สูตรที่ใช้ในการบรรยายอุณหภูมิวิกฤต เพื่อตรวจสอบการปรากฏสถานะ FFLO ในที่นี้จะตรวจสอบผ่านปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค ด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) แสดงในหัวข้อถัดไป

4.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis)

ในหัวข้อนี้นำเสนอวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) สำหรับการบรรยายพฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤต เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ขั้นแรกวิเคราะห์กรณีขีดจำกัด (limiting case) เริ่มจากสนามแม่เหล็กภายนอกเป็นศูนย์ $H=0$ (zero field) หรือปราศจากปรากฏการณ์ ลิตเติล – ปาร์ค กรณีดังกล่าวจะทำให้ความยาวแม่เหล็ก $a_H\to\infty$ (หรือ $\phi\to 0$) จึงใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expressions) แก่ฟังก์ชัน $\Phi\left(a,b,z/a\right)$ และหากค่า b และ z ถูกจำกัดแล้ว ฟังก์ชัน $\Phi\left(a,b,z/a\right)$ จะมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเบสเซิลดัดแปลงชนิดที่หนึ่ง $I_\upsilon\left(x\right)$ เป็น

$$\lim_{a\to\infty}\left[\Phi\left(a,b,z/a\right)\big/\Gamma\left(b\right)\right]=z^{(1-b)/2}I_{b-1}\left(2\sqrt{z}\right) \tag{4.16}$$

คราวนี้ให้สังเกต $\kappa_{L,p}\left(\phi\right)$ ในสมการ (4.12) ที่บรรจุฟังก์ชัน $\Phi\left(a_f+1,\left|L\right|+2,\phi_f\right)$ และ $\Phi\left(a_f,\left|L\right|+1,\phi_f\right)$ การที่ $a_H\to\infty$ ทำให้พารามิเตอร์เชิงซ้อน $a_f\to\infty$ เช่นกัน จึงกำหนดให้ $z=\phi_f a_f$ จะได้

$$z=u_p^2/4 \qquad \text{และ} \qquad u_p=d_f\left(p^2+2i/\xi_h^2\right)^{1/2} \tag{4.17}$$

พิจารณา $\kappa_L\left(\phi\right)\big|_{\phi=0}$ เพื่อความสะดวกจะใส่ $\lim\limits_{a_f\to\infty}$ ในฟังก์ชัน $\Phi\left(a,b,z\right)$ เสียก่อน จากนั้นให้ใช้ประโยชน์จาก $\Gamma\left(x\right)$ ฟังก์ชันแกมมา (gamma function) นั่นคือ $x\Gamma\left(x\right)/\Gamma\left(x+1\right)=1$ เขียนได้ดังนี้

$$\lim_{a_f \to \infty} \left(|L|+1\right) \frac{\Phi\left(a_f+1,|L|+2,z/a_f\right)}{\Phi\left(a_f,|L|+1,z/a_f\right)} = \lim_{a_f \to \infty} \left(|L|+1\right) \frac{\Phi\left(a_f+1,|L|+2,z/a_f\right) \big/ \Gamma\left(|L|+2\right)}{\Phi\left(a_f,|L|+1,z/a_f\right) \big/ \Gamma\left(|L|+1\right)}$$

เมื่อใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับ ดังสมการที่ (4.16) พจน์ $\kappa_{L,p}\left(\phi\right)$ ตามสมการที่ (4.12) ในกรณี $H=0$ จะลดรูปไปสู่ $\alpha_L\left(p\right)$ ที่นิยามไว้ในหัวข้อที่ 3.3.3 ดังนี้

$$\kappa_{L,p}\left(\phi\right)\Big|_{\phi=0} = |L| + u_p \frac{I_{|L|+1}\left(u_p\right)}{I_{|L|}\left(u_p\right)} \tag{4.18}$$

ตัวแปร u_p ถูกระบุไว้ในสมการที่ (4.17) และหากไม่คำนึงถึงเลขคลื่น p พารามิเตอร์ $\kappa_{L,0}\left(\phi\right)\Big|_{\phi=0}$ จะลดรูปไปสู่ $\kappa_L\left(\phi\right)\Big|_{\phi=0}$ ในสมการที่ (3.68) ดังนี้

$$\kappa_{L,0}\left(\phi\right)\Big|_{\phi=0} = |L| + u_f \frac{I_{|L|+1}\left(u_f\right)}{I_{|L|}\left(u_f\right)} \qquad \text{เมื่อ} \quad u_f = \frac{d_f}{\xi_h}\left(1+i\right) \tag{4.19}$$

ในส่วนการคำนวณเชิงตัวเลข กรณีขีดจำกัดสนามภายนอกเป็นศูนย์ ทำการสร้างกราฟด้วยกันสองกราฟ กราฟแรก ดังรูปที่ 20 คือ กราฟความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ $T_c\left(p=0\right)$ เทียบกับรัศมีเฟร์โร d_f (กราฟหลัก) และ กราฟความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต $T_c\left(p\right)$ เทียบกับเวกเตอร์คลื่น p (กราฟรอง) ในมิติไร้หน่วย ในที่นี้จะเลือกใช้พารามิเตอร์เช่นเดียวกับรูปที่ 2b ในวารสารฉบับ [61] ผลที่ได้ต้องตรงกัน เพื่อยืนยันความถูกต้องในวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ส่วนกราฟที่สอง ดังรูปที่ 21 คือ กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $T_c\left(p=0\right)$ เทียบกับรัศมีเฟร์โร d_f ในมิติไร้หน่วย เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง หากเลือกใช้พารามิเตอร์ที่เหมือนกัน แล้วผลที่ได้จะต้องตรงกันกับกราฟ T_c/T_{cs} และ d_f/ξ_h ของรูปที่ 3 ในวารสารฉบับ [35]

ต่อมาวิเคราะห์พฤติกรรมอุณหภูมิวิกฤตในการมีอยู่ของสนามแม่เหล็กภายนอก เริ่มจากตรวจสอบปรากฏการณ์ ลิตเติล – ปาร์ค (Little – Parks effect) แบบฉบับ กล่าวคือ พิจารณาในกรณีที่ไร้ซึ่งอิทธิพลของแผ่นประกบ (no proximity effect) ทราบกันดีว่า พจน์ที่แสดงถึงบทบาทของแผ่นประกบในพารามิเตอร์แตกคู่ ตามสมการที่ (4.15) คือ ฟังก์ชันขอบเขต W แสดงว่า หากให้ $W=0$ ผลลัพธ์ที่ได้ต้องกลับไปสู่ ปรากฏการณ์ลิตเติล – ปาร์ค แบบฉบับ [33],[34] ที่แสดง

พฤติกรรมในลักษณะการกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤต T_c ตามการแปรค่าของฟลักซ์ซอยด์สัมพัทธ์ ϕ_f และตามแบบฉบับไม่ได้คำนึงผลจากโมเมนตัมเชิงเส้น $p=0$ ดังนั้น สมการที่ (4.15) จะลดรูปกลายเป็น

$$\Omega_{L,0}\left(\phi_f\right)=\frac{1}{2}\frac{T_{cs}}{T_c}\frac{\xi_{sc}^2}{d_f^2}\left(L-\phi_f\right)^2 \tag{4.20}$$

จากนั้นให้ทำการถอดรากสมการที่ (4.14) โดยใช้พารามิเตอร์การแตกคู่ตามสมการที่ (4.20) พร้อมใช้ความสัมพันธ์ในกรณีสารเจือ (dirty case) $\xi_{sc}^2 \approx 0.3\xi_0 l$ กล่าวไว้ใน [45] ท้ายที่สุดจะได้

$$\frac{T_{cs}-T_c}{T_{cs}}=0.74\frac{\xi_0 l}{d_f^2}\left(L-\phi_f\right)^2 \tag{4.21}$$

นำสูตรอุณหภูมิวิกฤตเชิงการประมาณของ ลิตเติล-ปาร์ค สมการที่ (4.21) ไปสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T_c เทียบกับ ϕ_f ในมิติไร้หน่วย ด้วยพารามิเตอร์ของกรณีสารเจือ [5] ดังนี้ $\xi_0 = 0.2\mu m$, $l = 10nm$ และ $d_f = 0.7\mu m$ เมื่อ ξ_0 คือ ความยาวอาพันธ์ของ BCS (BCS coherence length) และ l คือ วิถีเสรีเฉลี่ยของอิเล็กตรอน (electron mean-free paht) พฤติกรรมของ T_c ต้องแสดงภาวะคาบคงที่และสังเกตเห็นได้ถึงการควอนไทต์ของฟลักซ์ซอยด์ ตามกฎการควอนไทต์ของ บอร์ - ซัมเมอร์เฟล [7] ซึ่งการควอนไทต์ของฟลักซซอยด์ เกิดขึ้นที่จำนวนเต็มของค่าวอร์เทค L [33],[34] ดังรูปที่ 22

ในส่วนสุดท้ายของบทนี้ กล่าวถึงจุดประสงค์หลักของงานวิจัย นั่นคือ การตรวจหาสถานะ FFLO (FFLO states) ของระบบแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ผ่านปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค (Little-Parks effect) ด้วยการนำสูตรอุณหภูมิวิกฤต T_c ในสมการที่ (4.14) มาวิเคราะห์ผ่านวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) ในการตรวจการปรากฏของสถานะ FFLO ทำโดย สังเกตการเลื่อนขึ้นของอุณหภูมิวิกฤตที่ขนาดของเวกเตอร์คลื่นมีค่าจำกัด ฉะนั้น การหาสถานะดังกล่าว จึงสร้างกราฟขึ้นมาสองกราฟ กราฟแรก (กราฟหลัก) แสดงการกวัดแกว่งของอุณหภูมิกฤตตามการแปรค่าของฟลักซ์แม่เหล็กไร้หน่วย (ปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค) และกราฟที่สอง (กราฟรอง) แสดงการเปลี่ยนแปลงของ T_c/T_{cs} ตามการแปรค่าของเวกเตอร์คลื่นตามยาว $\left(p\xi_h\right)^2$ (กราฟตรวจการเกิดสถานะ FFLO) ขอให้ตระหนักว่า การปรากฏสถานะ FFLO จะเกิดขึ้น

เมื่อ $T_c\left(p \neq 0\right) > T_c\left(p = 0\right)$ ภายใต้เงื่อนไข อุณหภูมิวิกฤตต้องมีค่าสูงกว่าอุณหภูมิที่สถานะวอร์เทคในปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค

อย่างไรก็ตาม การตรวจสอบสถานะ FFLO ดังที่กล่าวข้างต้น ด้วยการใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ต้องมาพร้อมกับการกำหนดพารามิเตอร์ในสมการที่ (4.14) เป็นอีกหนึ่งความสำคัญในลำดับต้น ๆ ของการตรวจหาสถานะที่ต้องการ ยกตัวอย่างเช่น พารามิเตอร์ต่าง ๆ ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขตัวนำยวดยิ่งที่มีลักษณะเป็นเปลือกบาง ซึ่งพารามิเตอร์วัสดุที่มีผลต่อกระบวนการวิเคราะห์นี้ ได้แก่ ความหนาของเปลือกตัวนำยวดยิ่ง $\left(d_s\right)$, รัศมีของโลหะเฟร์โร $\left(d_f\right)$, ความนำไฟฟ้า SC (FM) $\sigma_{sc}\left(\sigma_{fm}\right)$, ความยาวอาพันธ์ในตัวนำยวดยิ่ง $\left(\xi_{sc}\right)$, ความยาวอาพันธ์ในโลหะเฟร์โร $\left(\xi_{fm}\right)$, ความยาวแลกเปลี่ยน $\left(\xi_h\right)$ และค่าสภาพต้านทานรอยต่อ $\left(\gamma_b\right)$ ซึ่งความเป็นจริง เราไม่สามารถวัดค่าพารามิเตอร์ได้โดยตรง จึงเป็นที่มาในการกำหนดพารามิเตอร์แบบมิติไร้หน่วย ดังนี้

1. ความหนาของเปลือกตัวนำยวดยิ่ง : $\dfrac{d_s}{\xi_{sc}}$

2. รัศมีของโลหะเฟร์โร : $\dfrac{d_f}{\xi_h}$

3. ความนำไฟฟ้า : $\dfrac{\sigma_{sc}}{\sigma_{fm}}$

4. ความยาวแลกเปลี่ยน : $\dfrac{\xi_h}{\xi_{fm}}$

5. ความยาวอาพันธ์ : $\dfrac{\xi_{sc}}{\xi_{fm}}$

เพื่อความง่ายต่อการทำความเข้าใจ ในตรวจหาสถานะ FFLO ผ่านปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค จากการใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) จะแบ่งขั้นตอนทั้งหมด 4 ขั้นตอน

- **ขั้นตอนที่ 1**

  ทำการเลือกพารามิเตอร์ไร้หน่วยขึ้นมา โดยพารามิเตอร์เหล่านี้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไข $d_s/d_f < 1$ ในที่นี้ แสดงชุดพารามิเตอร์ 2 ชุด

  พารามิเตอร์ชุดที่ 1

  ได้แก่ $d_s/\xi_{sc} = 0.6, d_f/\xi_h = 1.0, \sigma_{sc}/\sigma_{fm} = 0.5, \xi_{fm}/\xi_h = 1.5,\ \xi_{sc}/\xi_{fm} = 0.1$ และ $\gamma_b = 0.4$

  ตรวจสอบในเงื่อนไข $d_s/d_f < 1$

$$\frac{d_s}{d_f}=\frac{\left(d_s/\xi_{sc}\right)}{\left(d_f/\xi_h\right)}\frac{\left(\xi_{sc}/\xi_{fm}\right)}{\left(\xi_h/\xi_{fm}\right)}=\frac{0.6}{1}\cdot\frac{0.1}{\left(1/1.5\right)}=0.09<1$$

พารามิเตอร์ชุดที่ 2

ได้แก่ $d_s/\xi_{sc}=0.35, d_f/\xi_h=1.0, \sigma_{sc}/\sigma_{fm}=0.75, \xi_{fm}/\xi_h=1.0$, $\xi_{sc}/\xi_{fm}=0.08$ และ $\gamma_b=0.5$

ตรวจสอบในเงื่อนไข $d_s/d_f<1$

$$\frac{d_s}{d_f}=\frac{\left(d_s/\xi_{sc}\right)}{\left(d_f/\xi_h\right)}\frac{\left(\xi_{sc}/\xi_{fm}\right)}{\left(\xi_h/\xi_{fm}\right)}=\frac{0.35}{1.0}\cdot\frac{0.08}{\left(1.0\right)}=0.028<1$$

- **ขั้นตอนที่ 2**

สร้างกราฟที่แสดงการกวัดแกว่งของ T_c ตามการแปรค่าของ ϕ_f (ปรากฏการณ์ ลิตเติล - ปาร์ค) ขึ้นมา ด้วยการดัดแปลงพารามิเตอร์การแตกคู่ ในสมการที่ (4.15) เป็นดังนี้

$$\Omega_{L,p=0}=\frac{1}{2}\frac{T_{cs}}{T_c}\left[\left(\frac{L-\phi_f}{\left(d_f/\xi_h\right)\left(\xi_h/\xi_{sc}\right)}\right)^2+\frac{\tilde{\Lambda}}{d_s/\xi_{sc}}\right]$$

เมื่อ

$$\tilde{\Lambda}=W\xi_{sc}=\frac{\left(\sigma_{fm}/\sigma_{sm}\right)\kappa_{L,p=0}}{\frac{d_f}{\xi_h}\frac{\xi_h}{\xi_{sc}}+\gamma_b\frac{\xi_{fm}}{\xi_{sc}}\kappa_{L,p=0}}$$

กำหนดให้ L คือ พารามิเตอร์วอร์เทค (vorticities parameter) ลักษณะกราฟที่เกิดขึ้นจะมีพฤติกรรมคล้ายคลึงกับกราฟในงานปี ค.ศ. 2009 [49] (ขอให้กลับไปดูรูปที่ 17) เนื่องจากอยู่ภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน

- **ขั้นตอนที่ 3**

สร้างกราฟที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของ T_c/T_{cs} ตามการแปรค่าของ $\left(p\xi_h\right)^2$ (กราฟตรวจการเกิดสถานะ FFLO) ขึ้นมา ด้วยการเลือกพิจารณาค่า ϕ_f เป็นค่า ๆ ในที่นี้ จะเลือกฟลักซ์แม่เหล็กขึ้นมาสองค่า ได้แก่ $\phi_{f,A}$ และ $\phi_{f,B}$ จากนั้น ให้สังเกตค่าสูงสุดของ T_c ที่ p^2 มีค่า

จำกัด กล่าวอีกนัยหนึ่งว่า หาก $T_c\left(p^2\right)$ มีพฤติกรรมเป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) แล้วระบบอาจก่อเกิดสถานะ FFLO ในทางตรงกันข้าม หาก $T_c\left(p^2\right)$ มีพฤติกรรมเป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) ระบบไม่ก่อเกิดสถานะ FFLO และเหตุผลที่เลือกใช้คำว่า "อาจ" เพราะว่า แม้จะพบฟังก์ชันเพิ่มของ $T_c\left(p^2\right)$ ก็ตาม แต่การปรากฏสถานะ FFLO ได้ อุณหภูมิดังกล่าวต้องมีค่าสูงกว่าอุณหภูมิในสถานะวอร์เทคจากปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค จึงนำมาสู่การเปรียบเทียบอุณหภูมิวิกฤต ในขั้นตอนสุดท้าย

- **ขั้นตอนที่ 4**

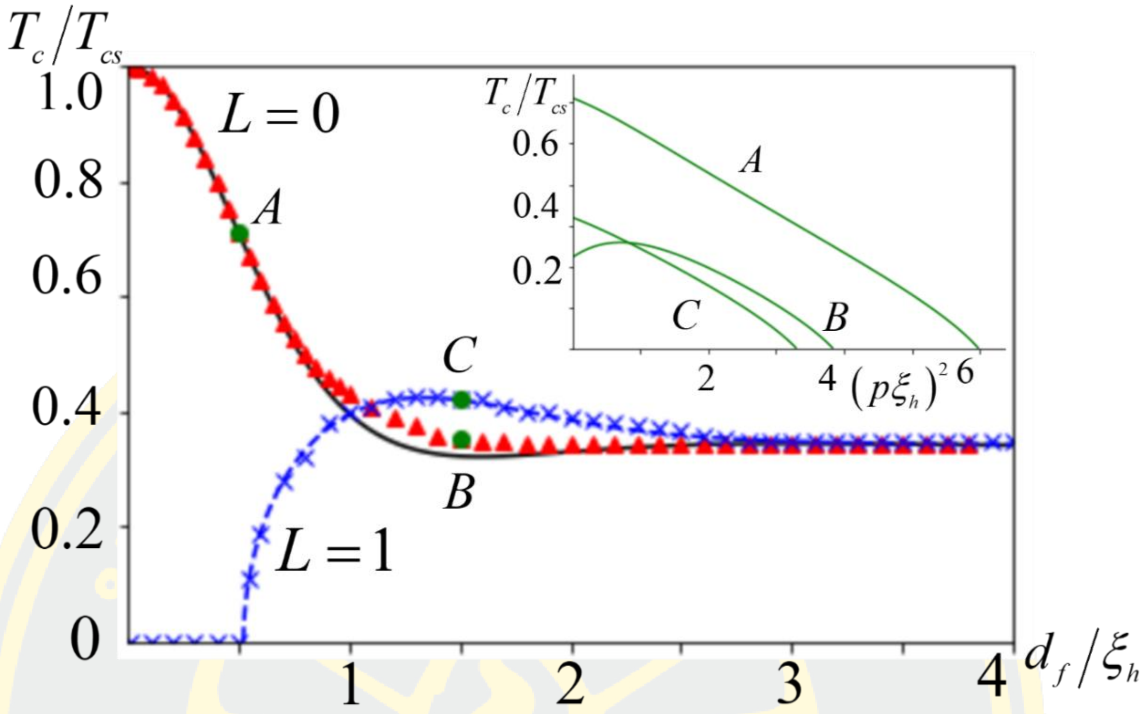
ขั้นตอนสุดท้าย คือ การใช้วิธีการหาค่าสูงสุด (method of maximization) ของกราฟ T_c/T_{cs} เทียบกับ $\left(p\xi_h\right)^2$ (กราฟรอง) เพื่อตรวจให้แน่ใจในค่าสูงสุดของ T_c เกิดขึ้นที่ $p^2 \neq 0$ และสูงกว่ากราฟปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค (กราฟหลัก) ในที่นี้จะทำผ่านการคำนวณเชิงตัวเลข สามารถดูตัวอย่าง การตรวจสอบการมีอยู่ของสถานะ FFLO ผ่านปรากฏการณ์การผลัดเปลี่ยน (switching phenomena) ได้จากรูปที่ 20 ค่าที่สูงที่สุดของอุณหภูมิวิกฤต $T_{c,\max}$ ถูกแสดงด้วย สัญลักษณ์สีแดง $(L=0)$ และสีน้ำเงิน $(L=1)$ อธิบายได้ดังนี้ วิธีการหาค่าสูงสุดทำให้ได้รับค่าที่แน่ชัด ขอให้ดูรูปที่ 23 สำหรับสถานะ $L=0$ เลือกค่ารัศมีเฟร์โร d_f/ξ_h มาสองค่า ได้แก่ 0.5 (จุด A) และ 1.45 (จุด B) จากรูปที่ 23 ที่จุด A พบ T_c/T_{cs} มีค่าเท่ากับ 0.7114 เมื่อ $\left(p\xi_h\right)^2$ มีค่าเป็นศูนย์ ในขณะที่จุด B พบ T_c/T_{cs} มีค่าเท่ากับ 0.3621 เมื่อ $\left(p\xi_h\right)^2$ มีค่าเท่ากับ 0.7500 จะเห็นได้ว่า เกิด $T_{c,\max}$ ที่ค่าจำกัดของ p^2 ในกรณีที่รัศมีเฟร์โร d_f/ξ_h เท่ากับ 1.45 (จุด B) ยิ่งไปกว่านั้น หากเราทำการหาค่าสูงสุดของ $T_c(L=0)$ ในกราฟหลักที่จุด B จะพบค่าของ T_c ต่ำกว่า 0.3621 ดังนั้น $T_c\left(p^2\neq 0\right)$ จะเป็นค่าสูงที่สุด จึงสังเกตเห็นสัญลักษณ์ที่เลื่อนขึ้นของจุด B ที่ไม่ทับกับเส้นประในกราฟรอง สิ่งนี้หมายความว่า หากไม่คำนึงถึงสถานะวอร์เทค $L>0$ สถานะ FFLO บังเกิดขึ้นในโดเมนที่วอร์เทคอิสระ $L=0$ แต่ในความเป็นจริง เราไม่สามารถเพิกเฉยต่อการมีอยู่ของสถานะ $L>0$ ได้ จึงจำเป็นต้องตรวจ $T_{c,\max}$ ในสถานะ $L>0$ ในที่นี้ให้เพ็งเล็งไปที่รัศมีเฟร์โร d_f/ξ_h เท่ากับ 1.45 ในสถานะ $L=1$ (จุด C) ผลปรากฏว่า พบ T_c/T_{cs} มีค่าเท่ากับ 0.4219 เมื่อ $\left(p\xi_h\right)^2$ มีค่าเป็นศูนย์ โดยค่า T_c ที่มากกว่า 0.3621 สิ่งนี้แสดงถึง สถานะ FFLO ในวอร์

เทคอิสระถูกบดบังจากสถานะวอร์เทค $L=1$ หมายความว่า คู่คูเปอร์ที่มีพฤติกรรมเชิงวงโคจรในชั้น $L=1$ ที่รัศมีเฟร์โรมีค่าเท่ากับ 1.45 จะไม่ถูกมอดุเลตด้วยค่าเวกเตอร์คลื่น FFLO ที่กล่าวมาข้างต้น คือตัวอย่างในการตรวจสอบการมีอยู่ของสถานะ FFLO ผ่านปรากฏการณ์การผลัดเปลี่ยน

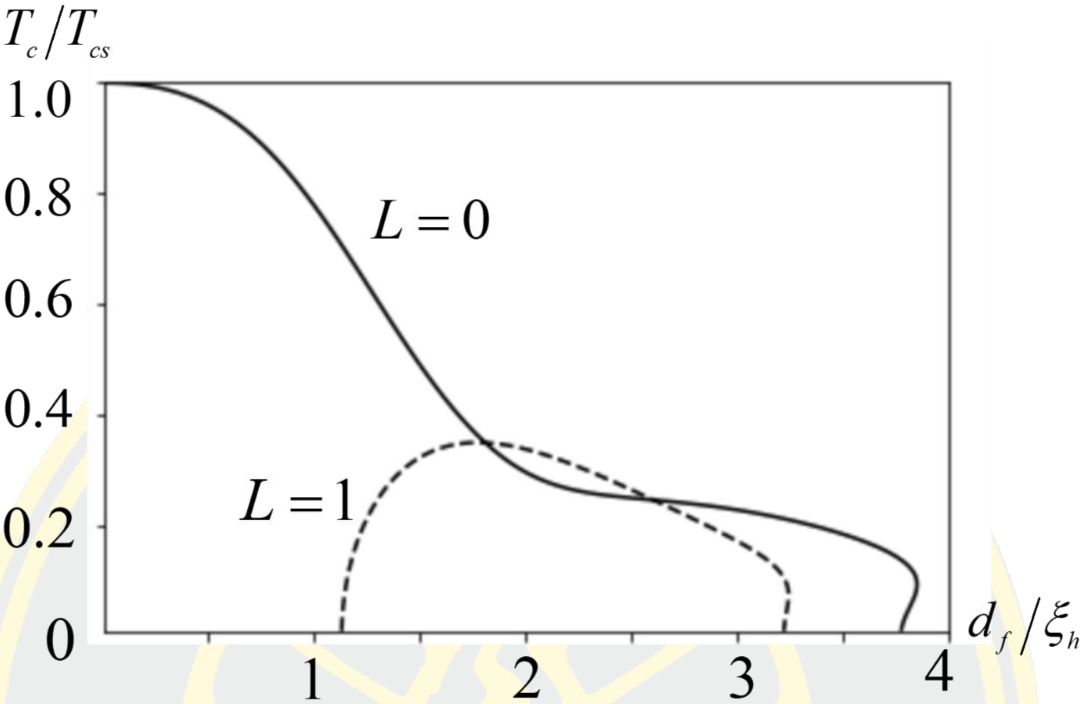
จากทั้ง 4 ขั้นตอน ในการหาสถานะ FFLO ดังกล่าว ในงานวิจัยนี้จะทำการตรวจหาสถานะ FFLO ผ่านปรากฏการณ์ ลิตเติล – ปาร์ค เริ่มจากการใช้พารามิเตอร์ชุดที่ 1 ในวิธีคำนวณเชิงตัวเลข ดังรูปที่ 24 สามารถบรรยายได้ดังนี้ ตามปรากฏการณ์ ลิตเติล -ปาร์ค (กราฟหลักในรูปที่ 24) เส้นทึบแสดงพฤติกรรมการแกว่ง T_c ในกรณีที่ $p=0$ ที่บ่งชี้ถึงการเปลี่ยนสถานะที่มีโมเมนตัมเชิงมุมต่างกัน $L \to L+1$ จะเรียกสถานะที่มี $L=0$ ว่า สถานะวอร์เทคอิสระ (vortex free state) และเรียกสถานะที่ $L>0$ ว่า สถานะวอร์เทค (vortex states) เมื่อ L เป็นจำนวนเต็ม ตามรูปที่ 24 กำหนดให้ $L=0,1,2,3$ ที่ได้เขียนกำกับไว้ใกล้เคียงกับเส้นทึบ คราวนี้ทำการเลือกค่า ϕ_f ในโดเมนสถานะ $L=0,1,2,3$ ขึ้นมาเพื่อนำ ϕ_f ที่เลือก ไปใส่เป็นค่าจำกัดในกราฟรอง ในที่นี้แสดง ϕ_f ในโดเมนสถานะ $L=0,1$ เท่านั้น เพราะ ϕ_f ในโดเมน $L=2,3$ จะให้ผลเช่นเดียวกับ ϕ_f ในโดเมน $L=1$ เริ่มจาก เลือกค่า $\phi_{f,A}=0.2$ (อยู่ใน $L=0$) และ $\phi_{f,B}=0.6$ (อยู่ใน $L=1$) เมื่อนำไปสร้างกราฟ T_c/T_{cs} เทียบกับ $(p\xi_h)^2$ กราฟถูกแสดงด้วยเส้นทึบ $\phi_{f,A}=0.2$ และเส้นประ $\phi_{f,B}=0.6$ พบว่าที่ $\phi_{f,A}$ แสดงพฤติกรรม T_c แบบฟังก์ชันเพิ่ม และที่ $\phi_{f,B}$ แสดงพฤติกรรม T_c แบบฟังก์ชันลด จากนั้น นำค่าสูงสุด T_c ไปกำกับลงในกราฟลิตเติล - ปาร์ค (กราฟหลัก) ที่แสดงด้วยเครื่องหมายกากบาท $(\times)$ และขอให้สังเกตที่โดเมน $0<\phi_f \le 0.4$ ในสถานะ $L=0$ พบการปรากฏ สถานะ FFLO (FFLO states) แต่เมื่อ $\phi_f > 0.4$ ที่สถานะ $L=1,2,3$ สถานะ FFLO จะไม่ปรากฏ สิ่งนี้หมายความว่า สำหรับพารามิเตอร์ชุดที่ 1 สถานะ FFLO ปรากฏขึ้นในสถานะวอร์เทคอิสระ (vortex free state) เท่านั้น แต่สำหรับสถานะวอร์เทค $L>1$ (vortex states) จะไม่พบสถานะ FFLO จึงสามารถตีความได้ว่า ลักษณะการเคลื่อนที่ของคู่คูเปอร์ในแกนโลหะเฟร์โรถูกแยกเป็นสองลักษณะที่ไม่ปะปนกัน กล่าวคือ หากคู่คูเปอร์เคลื่อนที่ตามแนวแกน z ด้วยค่าของเวกเตอร์คลื่น p แล้วจะตรวจพบ $T_{c,\max}\left(L=0, p^2>0\right)$ แสดงถึงการปรากฏของ สถานะ FFLO ที่ $L=0$ ในโดเมน ϕ_f ต้องมีค่าน้อย ด้วยพารามิเตอร์ที่พอเหมาะที่เป็นไปตามเงื่อนไข $d_s/d_f<1$ ในขณะที่หากคู่คูเปอร์มีพฤติกรรมการเคลื่อนที่เชิงวงโคจรด้วย L

ต่างๆ ตามรูปทรงเรขาคณิตที่วิเคราะห์ แล้วจะตรวจพบ $T_{c,\max}\left(L>0, p^2=0\right)$ คู่คูเปอร์นี้จะไม่เลื่อนตำแหน่งไปตามแนวแกน z ดังนั้น คู่คูเปอร์ที่ทลวงจากชั้นตัวนำยวดยิ่งไปสู่ชั้นโลหะเฟร์โร มีพฤติกรรมการเคลื่อนที่ได้มากสุดสองมิติ หรือกล่าวได้ว่า สถานะวอร์เทคเชิงวงแหวน (vortex-ring like state) ไม่สามารถเกิดขึ้นในระบบนี้นั่นเอง

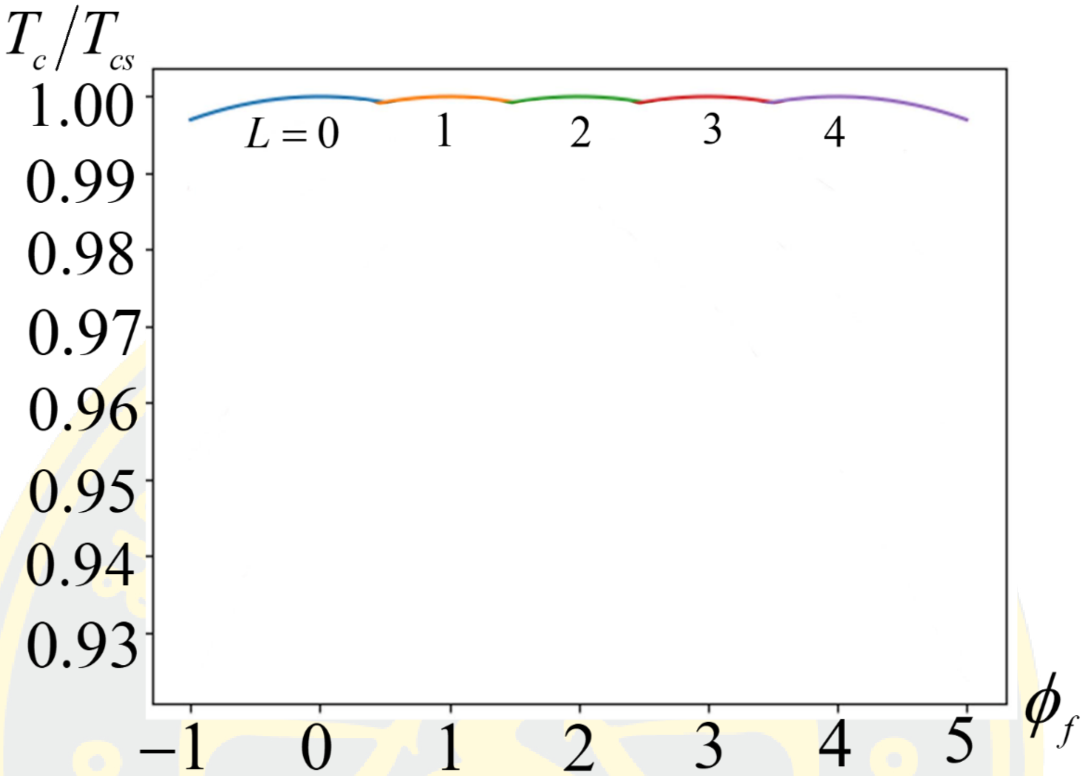
ถัดมาทำการใช้พารามิเตอร์ชุดที่ 2 ดังรูปที่ 25 พฤติกรรมการกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤตจะคล้ายคลึงกับพารามิเตอร์ชุดที่ 1 และสังเกตถึงการปรากฏสถานะ FFLO ในสถานะวอร์เทคอิสระ ที่โดเมนฟลักซ์แม่เหล็กมีค่าน้อยได้เช่นเดียวกัน อย่างไรก็ตาม พารามิเตอร์ 2 ชุดแรก ที่ได้เลือกขึ้นมาแสดงให้เห็นในที่นี้ เป็นพารามิเตอร์ที่ผ่านการลองผิดลองถูกมาค่อนข้างเยอะพอสมควร และเป็นหนึ่งในไม่กี่พารามิเตอร์ที่สามารถสังเกตการปรากฏของสถานะ FFLO กล่าวคือ หากใช้ชุดพารามิเตอร์ที่เป็นไปตามเงื่อนไขที่ตั้งขึ้นมา สถานะวอร์เทคเชิงวงแหวนจะเกิดขึ้นได้ยากในระบบนี้



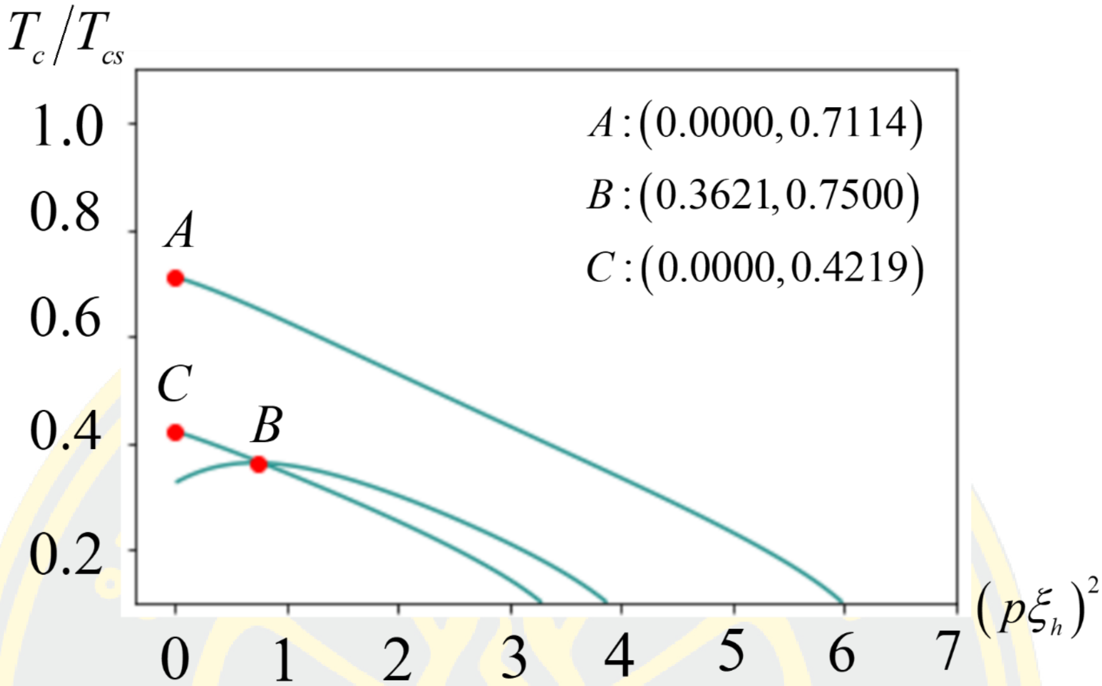
รูปที่ 20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต $T_c(p=0)$ *และรัศมีเฟร์โร* d_f *(กราฟหลัก) ในมิติไร้หน่วย การเลือกค่าภาวะวอร์เทค (vorticity) สองค่า ได้แก่* $L=0$ *(เส้นทึบสีดำ) และ* $L=1$ *(เส้นประสีน้ำเงิน) การค้นหาสถานะ FFLO จะใช้สัญลักษณ์จุดสามจุด ได้แก่จุดสีเขียว A, B และ C จุดเหล่านี้ คือ จุดที่เลือกค่าเฉพาะของรัศมีแกนเฟร์โร เพื่อนำไปสร้างในกราฟรอง ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง* $T_c(p)$ *และเลขคลื่น* p *ทั้งนี้ พารามิเตอร์ต่าง ๆ ในสมการที่ (4.14) จะถูกกำหนดให้มีค่าดังต่อไปนี้* $d_s/\xi_{sc}=0.5, \sigma_{sc}/\sigma_{fm}=0.5, \xi_{sc}/\xi_h=0.1, \xi_{fm}/\xi_h=1.5$ *และ* $\gamma_b=0.75$ *ลักษณะกราฟจะตรงกันกับ รูปที่ 2b ในวารสารฉบับ [61]*



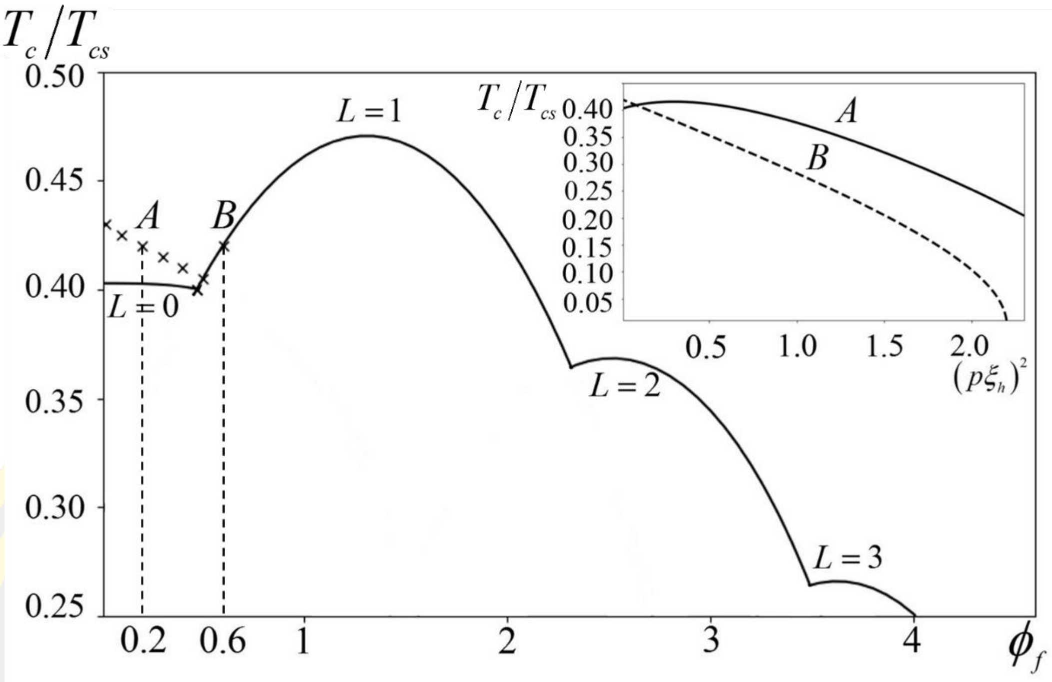
รูปที่ 21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต $T_c\left(p=0\right)$ และรัศมีเฟร์โร d_f ในมิติไร้หน่วย ด้วยค่าต่าง ๆ ของภาวะวอร์เทค (vorticity) ที่แทนด้วยลำดับ L โดยที่ $L=0$ (เส้นทึบ) $L=1$ (เส้นประ) พารามิเตอร์ต่าง ๆ ถูกเลือกให้มีค่าดังนี้ $d_s/\xi_{sc}=0.5$, $\xi_{sc}/\xi_h=0.265$, $\sigma_{sc}/\sigma_{fm}=2.5$ และ $\gamma_b=0$ ลักษณะกราฟจะตรงกันกับ รูปที่ 3 ในวารสารฉบับ [35]



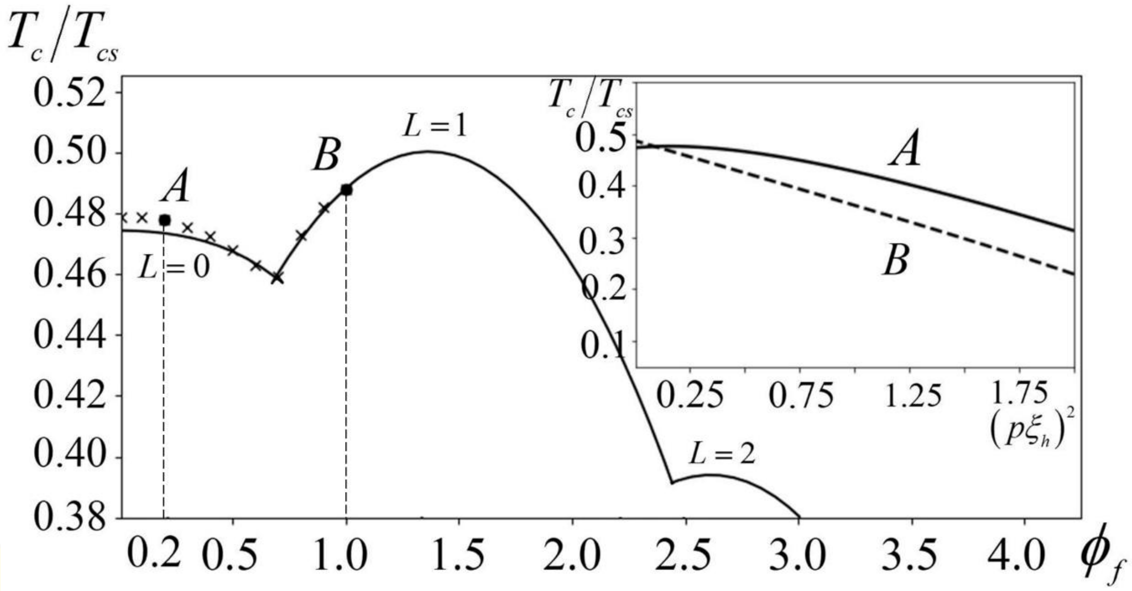
รูปที่ 22 แสดงปรากฏการณ์ ลิตเติล - ปาร์ค (Little – Parks effect) ที่เกิดภาวะคาบคงที่ ของอุณหภูมิวิกฤตตามการแปรค่าของฟลักซ์ซอยด์สัมพัทธ์ ในที่นี้ เลือกให้พารามิเตอร์แต่ละตัวในสมการที่ (4.21) เป็นไปตามกรณีสารเจือ [5] มีค่าดังนี้ $\xi_0 = 0.2\mu m$, $l = 10nm$ *และ* $d_f = 0.7\mu m$



รูปที่ 23 แสดงการหาค่าสูงสุดของอุณหภูมิวิกฤต $T_{c,\max}$ ตามการแปรค่าของเวกเตอร์คลื่น p^2 ในมิติไร้หน่วย ในที่นี้ทำการเลือกรัศมีเฟร์โร d_f/ξ_h เท่ากับ (A) 0.5, (B) 1.45 และ (C) 1.45 สัญลักษณ์จุดสีแดง คือ ค่าสูงสุดของอุณหภูมิวิกฤต ในส่วนพารามิเตอร์ต่าง ๆ จะมีค่าเช่นเดียวกับรูปที่ 20



รูปที่ 24 การแกว่งของอุณภูมิวิกฤต T_c/T_{cs} *ตามการแปรค่าของฟลักซ์ไร้หน่วย* $\phi_f = \pi H d_f^2/\phi_0$ *ที่ขดเป็นวงในบริเวณโลหะเฟร์โร สำหรับค่าต่างๆของเลขวอร์เทค* L *เส้นโค้งทึบหมายถึง สถานะวอร์เทคอิสระ* $(L=0)$ *และสถานะวอร์เทค* $(L>0)$ *ที่มีเวกเตอร์คลื่นเป็นศูนย์* $(p=0)$ *เครื่องหมายกากบาทแสดงถึง โดเมนความเสถียรภาพของสถานะ FFLO ซึ่งถูกกำหนดด้วยค่า ๆ หนึ่งของเวกเตอร์คลื่น* $(p \neq 0)$ *ส่วนกราฟย่อยบรรยายความสัมพันธ์ระหว่าง* T_c/T_{cs} *เทียบกับ* $(p\xi_h)^2$ *สำหรับจุด A* $(\phi_f = 0.2)$ *และจุด B* $(\phi_f = 0.6)$ *และใช้พารามิเตอร์ชุดที่ 1 ได้แก่* $d_s/\xi_{sc} = 0.6,\ \sigma_{sc}/\sigma_{fm} = 0.5,\ \xi_{fm}/\xi_h = 1.5,\ \xi_{sc}/\xi_{fm} = 0.1,\ \gamma_b = 0.4$ *และ* $d_f/\xi_h = 1$



รูปที่ 25 การแกว่งของอุณภูมิวิกฤต T_c/T_{cs} ตามการแปรค่าของฟลักซ์ไร้หน่วย ϕ_f สำหรับค่าต่างๆของเลขวอร์เทค L เส้นโค้งทึบหมายถึง สถานะวอร์เทคอิสระ $(L=0)$ และสถานะวอร์เทค $(L>0)$ ที่มีเวกเตอร์คลื่นเป็นศูนย์ $(p=0)$ เครื่องหมายกากบาทแสดงถึง โดเมนความเสถียรภาพของสถานะ FFLO ซึ่งถูกกำหนดด้วยค่า ๆ หนึ่งของเวกเตอร์คลื่น $(p\neq 0)$ ส่วนกราฟย่อยบรรยายความสัมพันธ์ระหว่าง T_c/T_{cs} เทียบกับ $(p\xi_h)^2$ สำหรับจุด A $(\phi_f=0.2)$ และจุด B $(\phi_f=1.0)$ และใช้พารามิเตอร์ชุดที่ 2 ได้แก่ $d_s/\xi_{sc}=0.35,\ \sigma_{sc}/\sigma_{fm}=0.75,\ \xi_{fm}/\xi_h=1.0,\ \xi_{sc}/\xi_{fm}=0.08,\ \gamma_b=0.5$ และ $d_f/\xi_h=1$

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้ทำการตรวจสอบสถานะ FFLO (FFLO states) ผ่านปรากฏการณ์ลิตเติล-ปาร์ค (Little Parks effect) ของระบบแผ่นประกบระหว่างตัวนำยวดยิ่ง - แม่เหล็กเฟร์โร (SC-FM) ที่มีแกนกลางเป็นแม่เหล็กเฟร์โรล้อมรอบด้วยตัวนำยวดยิ่งผนังบาง โดยมีสนามแม่เหล็กภายนอกคงที่ขนานกับแกนทรงกระบอก การคำนวณสูตรที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของอุณหภูมิวิกฤต T_c จะถูกพิสูจน์จากสมการอูซาเดลเชิงเส้น ในเงื่อนไขขีดจำกัดสารเจือ (dirty-limit) ด้วยการประมาณเปลือกตัวนำยวดยิ่งมีลักษณะบาง $d_s/d_f <1$ ที่จะนำมาสู่ฟังก์ชันคลื่นคู่ F_s ในรูปแบบการประมาณโหมดเดียว (SMA) ในระบบแผ่นประกบที่มีโลหะเฟร์โรอยู่ ทำให้สมบัติของปรากฏการณ์ ลิตเติล-ปาร์ค เปลี่ยนไปอย่างเห็นได้ชัด ตัวอย่างเช่น ความเป็นคาบคงที่ของฟลักซ์ควอนตัม ϕ_0 ถูกทำลายลง

การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) แสดงให้เห็นถึงการมีอยู่ของสนามแม่เหล็กกระตุ้นให้เกิดปรากฏการณ์การผลัดเปลี่ยนที่ค่าแน่นอนของฟลักซ์แม่เหล็ก ϕ_f โดยจะมีการเปลี่ยนสถานะจาก L เป็น $L+1$ ที่แสดงถึงโดเมนความเสถียรภาพของสถานะวอร์เทค (vortex states) ในขณะเดียวกัน ได้ตรวจสอบสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ของ Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov ที่เรียกว่า สถานะ FFLO ด้วยการแปรค่าเฟสของคู่คูเปอร์ (phase modulation) ตามแนวทรงกระบอกที่กำหนดด้วยเวกเตอร์คลื่น p

สิ่งที่พบคือ สถานะ FFLO เกิดที่สถานะวอร์เทคอิสระเท่านั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า คู่คูเปอร์ในแกนโลหะเฟร์โร มีพฤติกรรมการเคลื่อนที่ได้มากที่สุดสองมิติ (two-dimensional state) กล่าวคือหากคู่คูเปอร์เคลื่อนที่เชิงเส้นตามแนวแกนทรงกระบอกแล้วจะตรวจพบ $T_c\left(L=0, p^2>0\right)$ บ่งบอกถึงการมีอยู่ของ สถานะ FFLO ในหนึ่งมิติ (one-dimensional FFLO state) และหากคู่คูเปอร์มีพฤติกรรมเชิงวงโคจรในแกนโลหะเหล็กเฟร์โร แล้วจะตรวจพบ $T_c\left(L>0, p^2=0\right)$ (vortex states) บ่งบอกถึงการไม่ปรากฏของสถานะ FFLO เชิงสามมิติ (three- dimensional FFLO state) หรือสถานะวอร์เทคเชิงวงแหวน (vortex-ring like state) ไม่เกิดขึ้นในระบบนี้

ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ควรวิเคราะห์บทบาทของพารามิเตอร์ในเชิงทฤษฎี ยกตัวอย่างเช่น การใช้หลักการผันแปร (variation principle) ต่อสมการที่ (4.14) เพื่อคำนวณหาสูตรสำหรับเงื่อนไขการกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ทำให้สถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ในสถานการณ์ที่ L และ p ไม่เป็นศูนย์ปรากฏขึ้น จากนั้นนำสูตรที่ได้ไปวิเคราะห์เชิงตัวเลข ซึ่งก็จะสามารถหาสถานะที่ต้องการได้ จากที่กล่าวมาข้างต้น เป็นอีกหนึ่งวิธีที่น่าสนใจต่อการศึกษาความเป็นไปได้ของสถานะตัวนำยวดยิ่งไม่เอกพันธุ์ (inhomogeneous superconducting states) ที่คู่คูเปอร์ในชั้นโลหะเฟร์โรอาจมีพฤติกรรมการเคลื่อนที่เชิงสามมิติ (three-dimensional FFLO state)

บรรณานุกรม

[1] S.J. Champman, SIAM Journal on Applied Mathematics **62**, 1259-1274 (1995).

[2] I. Karaca, Sakarya University Journal of Science **21**, 1293-1299 (2017).

[3] J. N. Rjabinin, L. Shubnikow, Nature **135**, 581-582 (1935).

[4] P. Drude, Annalen der Physik **1**, 566 (1900) ; **3**, 369 (1900).

[5] Tinkham, Michael, Introduction to superconductivity, Harvard University (1996).

[6] Annett, F. James, Superconductivity, superfluids and condensates, **5**, UK (2004).

[7] P.N. Argyres, Physics Physique Fizika **2**, 131-139 (1965).

[8] A. Bagrets, C. Lacroix, A. Vedyayev, Physical Review B **68**, 054532 (2003).

[9] F.S. Bergeret, A.F. Volkov, K.B. Efetov, Physical Review B **68**, 064513 (2003).

[10] I. Baladié, A. Buzdin, N. Ryzhanova, A. Vedyayev, Physical Review B **63**, 054518 (2001).

[11] Ya.V. Fominov, N.M. Chtchelkatchev, A. Golobov, Physical Review B **66**, 014507 (2002)

[12] L.R. Tagirov, Physica C **307**, 145-163 (1998)

[13] J. Aarts, J.M.E. Geers, E. Brück, A.A. Golubov, R. Coehoorm, Physical Review B **56**, 2779 (1997).

[14] J.Y. Gu, C.-Y Jiang, J. Pearson, Ya.B. Bazaliy, S.D. Bader, Physical Review Letters **89**, 267001 (2002).

[15] L. Lazar, K. Westerholt, H. Zabel, L.R. Tagirov, Yu.V. Goryunov, N.N. Garif'yanov, I.A. Garifullin, Physical Review B **61**, 3711 (2000).

[16] V.V. Ryazanov, V.A. Oboznov, A.S. Prokof'ev, S.V. Dubonos, Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **77**, 39-43 (2003).

[17] J.Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Physical Review **108**, 1175 (1957).

[18] P.G. De Gennes, P.A. Pincus, Superconductivity of metals and alloys, USA, (1999).

[19] A.L. Fetter, J.D. Walecka, Quantum theory of many-particle systems, New York, (1971).

[20] J.B. Ketterson, S.N. Song, Superconductivity, UK, (1999).

[21] L.P. Gor'Kov, Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **34**, 735-739 (1958).

[22] G. Eilenberger, Zeitschrift für Physik **214**, 195-213 (1968).

[23] K.D. Usadel, Physical Review Letters **25**, (1970).

[24] K. Maki, T. Tsuneto, Progress of Theoretical Physics **31**, (1964)

[25] A.I. Larkin, Yu. N. Ovchinikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz.J **55**, 2262-2272 (1968). ; Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **28**, 1200-1205 (1969).

[26] L.N. Bulaevskii, A.I. Buzdin, M.L. Kulic, S.V. Panjukov, Advances in Physics **34**, (1985).

[27] A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, E. Il'ichev, Reviews of Modern Physics **76**, (2004).

[28] Zhu, Jian-Xin, Bogliubov-de Gennes Equations for Superconductors in the Continuum Model, 3-36 (2016).

[29] T. Matsubara, Progress of Theoretical Physics **14**, (1955).

[30] M. Yu. Kuprianov, V. F. Lukichev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94**, 139-149 (1988).

[31] A. I. Buzdin, B. Bujicic, M. Yu. Kupriyanov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **101**, 231-240 (1992).

[32] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. S. Prokof'ev, S. V. Dubonos, Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **77**, 39-43 (2003).

[33] W.A. Little, R.D. Parks, Physical Review Letters, **9**, 9 (1962).

[34] R.D. Parks, W.A. Little, Physical Review, **133**, A97 (1964).

[35] A. V. Samokhvalov, A. S. Mel'nikov, A. I. Buzdin, Physical Review B **76**, 184519 (2007).

[36] S. Mironov, A. Buzdin, Physical Review Letters. **118**, 077001, (2017).

[37] S.V. Mironov, D.Yu. Vodolazov, Y. Yerin, A.V. Samokhvalov, A.S. Melnikov, A. Buzdin, Physical Review Letters **121**, 077002 (2018).

[38] A.V. Samokhvalov, J.W.A. Robinson, A.I. Buzdin, Physical Review B **100**, 014509 (2019).

[39] B. Krunavakarn, Physics Letters A **383**, 1341-1344 (2019).

[40] F.S. Bergeret, K.B. Efetov, A. I. Larkin, Physical Review B **62**, 11872 (2000).

[41] T. Champel, M. Eschrig, Physical Review B **72**, 054523 (2005).

[42] T. Champel, M. Eschrig, Physical Review B **71**, 220506 (2005).

[43] M. Houzet, A. I. Buzdin, Physical Review B **76**, 060504 (2007).

[44] B. Krunavakarn, S. Yoksan, Physica C **495**, 5 (2013).

[45] B. Krunavakarn, Physica C **527**, 63 (2016).

[46] A.I. Buzdin, Reviews of Modern Physics **77**, 935 (2005).

[47] Z. Radovic, ´ L. Dobrosavlijevic´-Grujic´, A.I. Buzdin, J.R. Clem, Physical Review B **38**, 2388 (1988).

[48] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, 5th ed., Academic Press, London, (1994).

[49] A.V. Samokhvalov, A.S. Melnikov, J-P. Ader, A.I. Buzdin, Physical Review B **79**, 174502 (2009).

[50] M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Dover, New York, (1964).

[51] O. Buisson, P. Gandit, R. Rammal, Y. Y. Wang, and B. Pannetier, Physics Letters A **150**, 36 (1990).

[52] H. T. Jadallah, J. Rubinstein, P. Sternberg, Physical Review Letters **82**, 2935 (1999).

[53] N. Schildermans, A. Yu. Aladyshkin, A. V. Silhanek, J. Van de Vondel, V. V. Moshchalkov, Physical Review B **77**, 214519 (2008).

[54] L. Balicas, J. S. Brooks, K. Storr, S. Uji, M. Tokumoto, H. Tanaka, H. Kobayashi, A. Kobayashi, V. Barzykin, L.P. Gorkov, Physical Review Letters **87**, 067002 (2001).

[55] P. Fulde, R. Ferrell, Physical Review **135**, A550 (1964)

[56] A.I. Larkin, Yu.N. Ovchinnikov, Sov. Phys. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **20**, 762 (1965).

[57] J. S. Jiang, D. Davidović, D. H. Reich, C. L. Chien, Physical Review Lettes **74**, 314 (1995).

[58] V. Zdravkov, A. Sidorenko, G. Obermeier, S. Gsell, M. Schreck, C. M¨uller, S. Horn, R. Tidecks , L.R. Tagirov, Physical Review Letters **97**, 057004 (2006).

[59] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, A. V. Veretennikov, A. A. Golubov, J. Aarts, Physical Review Letters **86**, 2427 (2001).

[60] S. Mironov, A. Melnikov, A. Buzdin, Physical Review Letters **109**, 237002 (2012).

[61] A.V. Samokhvalov, Journal of Experimental and Theoretical Physics **125**, 298 (2017).

[62] ธนะสิทธิ์ รัชตเรืองสิทธิ์, วารสารวิทยาศาสตร์ศรีนครินทรวิโรฒ **27**, 232-239 (2554).

[63] F. S. Bergeret, A. F. Volkov, K. B. Efetov, Reviews of Modern Physics **77**, 1321 (2005).

[64] M. Eschrig, Reports on Progress in Physics **78**, 10450 (2015).

[65] T. Tokuyasu, J. A. Sauls, and D. Rainer, Physical Review B **38**, 8823 (1988).

[66] V. P. Mineev, K. V. Samokhin, Introduction to Unconventional Superconductivity (Mosk. Fiz. Tekh. Inst., Moscow, 1998; Taylor Francis, London, 1979).

[67] V.L. Berezinskii, ZhETF Pis. Red **20**, 628-631 (1974). ; Journal of Experimental and Theoretical Physics **20**, 287-289, (1975).

[68] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, Sov. Phys. Journal of Experimental and Theoretical Physics **12**, 1243, (1961).

บรรณานุกรม

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ-สกุล	นาย นภสินธุ์ ชำนาญ
วัน เดือน ปี เกิด	28 กุมภาพันธ์ 2538
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	11 ซอยลงหาดบางแสน 3 ถนนลงหาดบางแสน ตำบล แสนสุข อำเภอ เมือง จังหวัด ชลบุรี 20130
ประวัติการศึกษา	30 ธันวาคม 2559 วิทยาศาสตร์บัณฑิต (ฟิสิกส์) คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา